1. Sia $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dire se $\mathbf{x}$ è autovettore di A. Se si, dire per quale autovalore.

Sol. Si ha $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 29 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 29 \end{pmatrix}$ non è della forma $\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, dunque $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ non è un autovettore di A.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dire se $\mathbf{x}$ è autovettore di A. Se si, dire per quale autovalore.

Sol. Si ha $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$ non è della forma $\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, dunque $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ non è un autovettore di$A$.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. determinare quali dei seguenti vettori sono autovettori di A:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 18 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Far vedere che 7 è autovalore di A e determinare l'autospazio corrispondente.

Sol. Si ha $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ è un autovettore di$A$, di autovalore -4.

$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}$ non è della forma $\lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, dunque $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ non è un autovettore di$A$.

$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di$A$, di autovalore 7.

Si ha $\begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$. Poiché $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A, lo è anche $\begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix}$ (con lo stesso autovalore). Infine $\begin{pmatrix} 18 \\ -15 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ e dunque anche $\begin{pmatrix} 18 \\ -15 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A.

Abbiamo già scopreto che 7 è un autovalore di A in quanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di autovalore 7.

Un altro modo di dimostrare che 7 è un autovalore di A è calcolare $\det(A - 7\mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 0$.

Il 7-autospazio di A è $\ker(A - 7\mathrm{Id})$. Per determinarlo dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -6x + 6y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$ e dunque il 7-autospazio di A è span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

4. Senza calcoli trovare un autovalore di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Sol. La matrice A ha due righe uguali, dunque $\det A = 0$. Ma allora $\det(A - 0 \cdot \mathrm{Id}) = 0$, ovvero $\lambda = 0$ è un autovalore di A.

5. Senza calcoli trovare un autovalore λ di $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ e due autovettori linearmente indipendenti in V_λ.

Sol. La matrice A ha due righe uguali, dunque $\det A = 0$. Ma allora $\det(A - 0 \cdot \mathrm{Id}) = 0$, ovvero $\lambda = 0$ è un autovalore di A. Per determinare V_0 dobbiamo rosolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 5x + 5y + 5z = 0 \\ 5x + 5y + 5z = 0 \\ 5x + 5y + 5z = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$. Due autovettori linearmente indipendenti in V_0 sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

6. Sia A una matrice e sia $\mathbf{x}$ un autovettore di A di autovalore λ. Calcolare $A^2\mathbf{x}$, $A^3\mathbf{x}$, $A^n\mathbf{x}$.

Sol. Per definizione di autovettore di autovalore λ, si ha $A\mathbf{x} = -\lambda\mathbf{x}$, da cui $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$. Allo stesso modo $A^3\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}$ e $A^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x}$.

7. Data $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dire se $\lambda = 5$ è autovalore di A.

Sol. Calcoliamo

$$\det(A - 5\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} = -4 - 16 = -20 \neq 0$$

Dunque $\lambda = 5$ non è un autovalore di A.

8. Calcolare i polinomi caratteristici delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol. Si ha

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= ((1-\lambda)^2 - 1)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = ((1-\lambda)^2-1)^2 = \lambda^2(\lambda-2)^2$$

9. Calcolare gli autovalori $\lambda \in \mathbf{R}$ delle seguenti matrici. Determinare gli autovettori corrispondenti. Dire quali matrici sono diagonalizzabili.

(i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Sol. (i) Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

La matrice ha pertanto l'unico autovalore $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 3. La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è

$$\dim(V_1) = \dim\ker \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - \mathrm{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è minore della sua molteplicità algebrica: la matrice non è diagonalizzabile. Gli 1-autovettori si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

dunque una base per V_1 è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4$$

La matrice non ha autovalori reali: non è diagonalizzabile. Ovviamente, non essendoci autovalori reali non ci sono neppure autovettori.

(iii) Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda).$$

La matrice ha pertanto due autovalori: l'autovalore $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore $\lambda = 3$, con molteplicità algebrica 1. La molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 3$ è necessariamente uguale alla sua molteplicità algebrica in quanto per ogni autovalore vale

$$1 \leq \text{molteplicità geometrica}(\lambda) \leq \text{molteplicità algebrica}(\lambda)$$

La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è invece

$$\dim(V_1) = \dim\ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 - \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Anche la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è uguale alla sua molteplicità algebrica: la matrice è diagonalizzabile. I 3-autovettori sono gli elementi di

$$\ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si ottengono pertanto risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -2x - z = 0 \\ -2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

da cui si vede facilmente che una base per V_3 è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Analogamente, gli 1-autovettori si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -z = 0 \\ 0 = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

dunque una base per V_1 è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

10. Dire quale delle seguenti matrici è diagonalizzabile, spiegando perché:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Sol. Si tratta in tutti i casi di matrici triangolari, dunque i loro autovalori sono semplicemente gli elementi sulla diagonale. Ne segue che le matrici A, C e D, avendo 3 autovalori distinti, sono diagonalizzabili (la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale ad uno, e dunque coincide necessariamente con la sua molteplicità geometrica, vedi l'esercizio precedente). La matrice B ha invece un autovalore di molteplicità algebrica 2 (si tratta dell'autovalore 3). Per stabilire se B è diagonalizzabile o meno dobbiamo pertanto determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 3. Si ha

$$\dim V_3 = \dim\ker \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3 - \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

La molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 3$ è pertanto minore della sua molteplicità algebrica: la matrice B non è diagonalizzabile.

11. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol. Il rango della matrice M è uno; dunque $\lambda = 0$ è autovalore dell'applicazione lineare L_M e la dimensione dell'autospazio $V_0 = \ker L_M$ è 4. Pertanto la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 0$ è almeno 4. Dal fatto che la matrice ha ordine 5 dispari, anche il quinto autovalore è reale e coincide con la traccia di M. Dunque il polinomio caratteristico di M è dato da

$$P_\lambda(M) = \lambda^4(\lambda - 20).$$

12. Sia A la matrice 6×6

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Far vedere che $\lambda = 2$ è autovalore di A. Determinare la dimensione dell'autospazio corrispondente.
(ii) Determinare il polinomio caratteristico di A.

Sol. (i) Si ha

$$\det(A - 2\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

dunque $\lambda = 2$ è un autovalore di A. L'autospazio corrispondente è determinato dall'unica equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$ (ripetuta sei volte) ha pertanto dimensione $6 - 1 = 5$.
(ii) La molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 2$ è almeno 5. Il sesto autovalore è necessariamente reale ed è dato da

$$\mathrm{traccia}(M) - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8.$$

Dunque il polinomio caratteristico di A è dato da

$$P_\lambda(A) = (\lambda - 2)^5(\lambda - 8).$$

13. Determinare se le seguenti matrici sono coniugate:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sol. Due matrici sono simili se e solo se hanno identici polinomi caratteristici e per ogni autovalore λ, la molteplicità geometrica di λ relativamente alla prima matrice coincide col la sua molteplicità geometrica relativamente alla seconda matrice. In questo caso si ha

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

$$P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Dunque $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$. Per quanto riguarda l'autovalore $\lambda = 2$, questo ha molteplicità geometrica 1 sia per A che per B. Per quanto riguarda l'autovalore $\lambda = 1$ abbiamo

$$\dim\ker(A - \mathrm{Id}) = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - \mathrm{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\dim\ker(B - \mathrm{Id}) = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - \mathrm{rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Dunque A e B non sono coniugate. In particolare, A è diagonalizzabile, mentre B non lo è.

14. Determinare se le seguenti coppie di matrici sono coniugate:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol. Per quanto riguarda la prima coppia di matrici, si ha

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 3$$

$$P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 3$$

Dunque $P_A(\lambda) \neq P_B(\lambda)$: le matrici A e B non sonoconiugate.

Per quanto riguarda la seconda coppia di matrici, si può osservare che l'unica matrice simile alla matrice identità è la matrice identità stessa (dimostrarlo). Altrimenti si può osservare che $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 = P_B(\lambda)$, ma che l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica uguale ad 1 relativamente ad A ed uguale a 2 relativamente a B.

15. Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche calcolare gli autovalori e una base di autovettori:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

Sol.

$$\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 9-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 10)$$

Ne segue che gli autovalori di A sono $\{5, 10\}$. Per determinare una base di autovettori basta determinare una base per ogni autospazio.

$$V_5 = \ker(A - 5\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{10} = \ker(A - 10\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Riassumendo, una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A è

$$\mathcal{B}_A = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Per la seconda matrice si ha:

$$\det(B - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -13 \\ -13 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 8)(\lambda - 18)$$

Ne segue che gli autovalori di B sono $\{-8, 18\}$. Per determinare una base di autovettori basta determinare una base per ogni autospazio.

$$V_{-8} = \ker(B + 8\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 13 & -13 \\ -13 & 13 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{18} = \ker(B - 18\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -13 & -13 \\ -13 & -13 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Riassumendo, una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di B è

$$\mathcal{B}_B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per la terza matrice si ha:

$$\det(C - \lambda\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{3}{2})$$

Ne segue che gli autovalori di C sono $\{1/2, 3/2\}$. Per determinare una base di autovettori basta determinare una base per ogni autospazio.

$$V_{1/2} = \ker(C - \frac{1}{2}\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{3/2} = \ker(C - \frac{3}{2}\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Riassumendo, una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di C è

$$\mathcal{B}_C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per la quarta matrice si ha:

$$\det(D - \lambda\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -2 \\ -2 & 5/3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{23}{3})$$

Ne segue che gli autovalori di D sono $\{1, 23/3\}$. Per determinare una base di autovettori basta determinare una base per ogni autospazio.

$$V_1 = \ker(D - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2/3 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{23/3} = \ker(D - \frac{23}{3}\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -2/3 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Riassumendo, una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di D è

$$\mathcal{B}_D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

16. Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche calcolare gli autovalori e una base di autovettori:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.

$$\det(A-\lambda\mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-3) - 9(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+4)$$

Ne segue che gli autovalori di A sono $\{1, 3, -4\}$. Per determinare una base di autovettori basta determinare una base per ogni autospazio.

$$V_1 = \ker(A-\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema

$$\begin{cases} 3y = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ è pertanto una base di V_1.

$$V_3 = \ker(A-3\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema

$$\begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ 3x - 5y - z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$$

è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è pertanto una base di V_3.

$$V_{-4} = \ker(A+4\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema

$$\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -y + 5z = 0 \end{cases}$$

è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ è pertanto una base di V_{-4}. Riassumendo, una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A è

$$\mathcal{B}_A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per la matrice B si porocede in modo del tutto analogo:

$$\det(B - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 4 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -3 \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} + (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -9(1-\lambda) + (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 15) = (1-\lambda)(\lambda - 6)(\lambda + 4)$$

Ne segue che gli autovalori di B sono $\{1, 6, -4\}$. Per determinare una base di autovettori basta determinare una base per ogni autospazio.

$$V_1 = \ker(B - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema

$$\begin{cases} 3y + 4z = 0 \\ 3x = 0 \\ 4x = 0 \end{cases}$$

è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ è pertanto una base di V_1.

$$V_6 = \ker(B - 6\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema

$$\begin{cases} -5x + 3y + 4z = 0 \\ 3x - 5y = 0 \\ 4x - 5z = 0 \end{cases}$$

è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ è pertanto una base di V_6.

$$V_{-4} = \ker(B + 4\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 5y = 0 \\ 4x + 5z = 0 \end{cases}$$

è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ è pertanto una base di V_{-4}. Riassumendo, una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di B è

$$\mathcal{B}_B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

17. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{100}.

Sol. Osserviamo innanzi tutto che A è diagonalizzabile, avendo due autovalori distinti (infatti A è una matrice triangolare e dunque i suoi autovalori sono gli elementi che si trovano sulla diagonale). Per detrerminaare una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A dobbiamo fornire una base per ogni autospazio. Si ha:

$$V_2 = \ker(A - 2\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{-2} = \ker(A + 2\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

Indichiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^2$ data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}. \right\}$ Se indichiamo con φ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice A rispetto alla base canonica, quanto ottenuto finora significa che la matrice che rappresenta l'applicazione lineare φ rispetto alla base $\mathcal{B}$ (sia in partenza che in arrivo) è la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1}$$

da cui

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} D^{100} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(tanto per non lasciarvi la curiosità, $2^{100} = 1267650600228229401496703205376$).