1. Sia $F\colon \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \\ x_1+x_3 \\ x_2+x_4 \end{pmatrix},$$

e siano dati i sottospazi

$$U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \qquad W = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

(i) Determinare $\ker F$ e dire se F è iniettiva.
(ii) Determinare l'immagine $F(\mathbf{R}^4)$, esibendone una base.
(iii) Calcolare $\dim U$, $U \cap \ker F$, $\dim F(U)$, esibire una base di $F(U)$.
(iv) Calcolare $\dim W$, $W \cap \ker F$, $\dim F(W)$, esibire una base di $F(W)$.
(v) Spiegare i risultati ottenuti in (iii) e (iv).

Sol. (i) Determinare il nucleo di F equivale a risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1+x_3=0 \\ x_1+x_3=0 \\ x_2+x_4=0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. Poiché il nucleo di F è non banale (ha dimensione 1) l'applicazione F non è iniettiva.

(ii) L'immagine $F(\mathbf{R}^4)$ è generata dalle colonne della matrice che rappresentativa di F, ovvero della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, si vede facilmente che le prime tre colonne sono linearmente indipendenti, mentre la quarta colonna dipende linearmente dalle prime tre. Ne segue che una base di $F(\mathbf{R}^4)$ è costituitra dai tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare, l'immagine di F ha dimensione 3.

(iii) Utilizzando l'algoritmo di Gauss-Jordan si vede facilmente che i generatori dati per U sono linearmente indipendenti, da cui $\dim U = 2$. Per determinare $\ker F \cap U$ sostituiamo le coordinate di un generico vettore di U

$$a\begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbf{R}$$

nelle equazioni del sistema lineare che definisce $\ker F$. Troviamo che necessariamente $a = b = 0$, per cui $\ker F \cap U$ è il vettore nullo di $\mathbf{R}^4$.

Alternativamente: risolviamo

$$a\begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \tag{$*$}$$

ovvero

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

E' immediato verificare che l'unica soluzione di questo sistema è quella banale, ovvero $a = b = c = 0$. Sostituendo i valori $a = b = c = 0$ nell'equazione (*), troviamo che $\ker F \cap U = \{0\}$.

Lo spazio $F(U)$ è generato dai due vettori

$$F\begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\4\\1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Sono linearmente indipendenti, pertanto sono una base di $F(U)$, che ha dimensione 2.

(iv) In modo del tutto analogo al punto (ii) si trova che $\dim W = 2$. Per determinare $\ker F \cap W$ sostituiamo le coordinate di un generico vettore di W

$$a\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbf{R}$$

nelle equazioni del sistema lineare che definisce $\ker F$. Troviamo che necessariamente $a = -b$, per cui $\ker F \cap W$ è il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dal vettore $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Alternativamente: risolviamo

$$a\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \tag{$**$}$$

ovvero

$$\begin{cases} -a+c=0 \\ 2a+b-c=0 \\ 2a+b-c=0 \\ -a+c=0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $a=-b=c$. Sostituendo $a=-b=c$ nell'equazione (**) si trova che $\ker F \cap W$ é lo spazio genarato da $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e coincide con $\ker F$. Lo spazio $F(W)$ è generato dai due vettori

$$F\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Essi sono linerment dipendenti (sono addirittura uguali) pertanto una base è costituita da uno solo di essi; la dimensione di $F(W)$ è 1.
(v) In generale, se $\varphi\colon V_1 \to V_2$ è un'applicazione lineare, vale

$$\dim \varphi(V_1) = \dim V_1 - \dim \ker \varphi$$

Se prendiamo $V_1 = U$, $V_2 = \mathbf{R}^4$ e $\varphi = F|_U$ (F ristretta al sottospazio U), otteniamo

$$\dim F|_U(U) = \dim U - \dim \ker(F|_U)$$

Ma $F|_U(U) = F(U)$ e $\ker(F|_U) = \ker F \cap U$, da cui

$$\dim F(U) = \dim U - \dim(\ker F \cap U)$$

in accordo con quanto trovato al punto (iii). Il risultato del punto (iv) si spiega allo stesso modo.

2. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare $\ker F$ e $\mathrm{Im}(F)$ esibendone delle basi.
(ii) È possibile determinare un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$, di dimensione 2, tale che $\dim U = \dim F(U)$? Se si, determinarlo. Se no, spiegare perché.
(iii) È possibile determinare un sottospazio $W \subset \mathbf{R}^3$, di dimensione 1, tale che $\dim W = \dim F(W)$? Se si, determinarlo. Se no, spiegare perché.

Sol. (i) Si vede subito che $\ker F$ è l'insieme dei vettori della forma $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, ovvero $\ker F = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Altrettanto immediato è osservare che l'immagine di F è $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(ii) Dalla formula per le dimensioni scritta al punto (v) dell'esercizio precedente sappiamo che il problema equivale a determinare un sottospazio U di dimensione 2 di $\mathbf{R}^3$ tale $\dim(U \cap \ker F) = 0$. Ma $\dim(\ker F) = 2$ e dalla formula di Grassmann

$$\dim(U \cap \ker F) = \dim(U) + \dim(\ker F) - \dim(U + \ker F) \geq 2 + 2 - 3 = 1$$

Dunque non esiste alcun sottospazio U con $\dim(U) = \dim F(U) = 2$.
(iii) Il problema è del tutto analogo al precedente. In questo caso, però, $\dim(W) = 1$ e dunque W è abbastanza piccolo ed è possibile sceglierlo in modo che non intersechi $\ker F$ se non nello 0. Più formalmente, dato che uno spazio W di dimensione uno è della forma $W = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right\}$, l'unica condizione da soddifare affinché $W \cap \ker F = \{0\}$ è

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \notin \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ovvero $a \neq 0$.

3.
(i) Scrivere un'applicazione lineare iniettiva $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Se ne può trovare una sia iniettiva che suriettiva? Se si, determinarla. Se no, spiegare perché.
(ii) Scrivere un'applicazione lineare iniettiva $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$. Se ne può trovare una sia iniettiva che suriettiva? Se si, determinarla. Se no, spiegare perché.
(iii) Scrivere un'applicazione lineare suriettiva $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$.
(iv) Scrivere un'applicazione lineare suriettiva $F\colon \mathbf{R}^5 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Se ne può trovare una sia iniettiva che suriettiva? Se si, determinarla. Se no, spiegare perché.

Sol. (i) L'applicazione identica da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$ è sia iniettiva che surietiva. Più in generale le applicazioni sia iniettive che suriettive da $\mathbf{R}^3$ in sè si caratterizzano come quelle rappresentate da matrici 3×3 aventi rango 3.
(ii) L'applicazione

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è iniettiva. Più in generale le applicazioni iniettive da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^4$ sono tutte e sole quelle rappresentate da una matrice 4×3 avente rango 3. Non possono esistere applicazioni suriettive da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^4$ in quanto la dimensione dell'immagine di un'applicazione è sempre minore o uguale alla dimensione dello spazio di partenza (dominio dell'applicazione).

(iii) Abbiamo già scritto un'applicazione suriettiva da $\mathbf{R}^3$ in sè al punto (i). Più in generale, le applicazioni suriettive da $\mathbf{R}^3$ in sè si caratterizzano come quelle rappresentate da matrici 3×3 aventi rango 3 (e sono automaticamente anche iniettive).
(iv) L'applicazione

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

è suriettiva. Più in generale le applicazioni suriettive da $\mathbf{R}^5$ in $\mathbf{R}^3$ sono tutte e sole quelle rappresentate da una matrice 3×5 avente rango 3. Non possono esistere applicazioni iniettive da $\mathbf{R}^5$ in $\mathbf{R}^3$ in quanto la dimensione del nucleo di un'applicazione è sempre maggiore o uguale alla differenza tra la dimensione dello spazio di partenza (dominio dell'applicazione) e quella dello spazio di arrivo (codominio dell'applicazione). In questo caso stiamo dicendo che il nucleo di una qualunque applicazione $F\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ ha dimensione almeno 2.

4. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ un'applicazione lineare, tale che
$$F(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$
Calcolare $F(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix}6\\7\\1\end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix})$.

Sol. Indichiamo con $\mathcal{B}$ l'insieme dei tre vettori
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \right\}$$
E' immediato verificare che si tratta di una base di $\mathbf{R}^3$. Il dato fornito su F pertanto si interpreta come: la matrice che rappresenta l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, rispetto alla base $\mathcal{B}$ nello spazio di partenza e la base canonica nello spazio di arrivo è la matrice
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
Ne segue che la matrice che rappresenta l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, rispetto alla base canonica nello spazio di partenza e nello spazio di arrivo è la matrice
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -2/3\\1 & 0 & -2/3\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$
Pertanto,
$$F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -2/3\\1 & 0 & -2/3\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\0\\0\end{pmatrix}$$
Analogamente
$$F\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8/3\\1/3\\0\\-2\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4/3\\2/3\\0\\0\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10/3\\5/3\\0\\0\end{pmatrix},$$
$$F\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}6\\7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5/3\\16/3\\5\\-1\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-25/3\\-4/3\\-2\\-7\end{pmatrix},$$