GEOMETRIA ed ALGEBRA $\quad$ 4^o Appello $\quad$ Roma, 26 settembre 2006, ore 10:00–12:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il determinante di A; calcolare, se possibile, la matrice A^{-1}.

a) Sviluppando rispetto alla prima riga otteniamo

$$\det(A) = 1 \cdot \det(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}) - 1 \cdot \det(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}) + 0 - (-1) \cdot \det(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix})$$

$$= 1 - 1 + 3 = 3$$

Poiché $\det(A) \neq 0$ la matrice risulta invertible. Calcoliamo quindi la sua inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) Dimostrare che i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$ sono linearmente indipendenti.

Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare che scambia $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

(b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.

(c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

a) L'unica soluzione del sistema $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 = 0$ è chiaramente $\alpha = \beta = 0$; di conseguenza i due vettori sono linearmente indipendenti.

b) Sappiamo che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$ e $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$; di conseguenza, l'espressione di f nella base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ in dominio e codominio è data dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) La matrice di passaggio dalla base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ a quella canonica è data da $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcoliamo la sua inversa ed otteniamo che la matrice dell'applicazione f nella base canonica (in dominio e codominio) è data da

$$M' = C \cdot M \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M.$$

3. Siano v_1, v_2 e v_3 vettori linearmente indipendenti in $\mathbf{R}^4$.
   a) Scrivere la definizione di $\mathrm{span}\{\mathrm{w_1}, \mathrm{w_2}, \ldots, \mathrm{w_n}\}$ per generici vettori w_i.
   b) Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $V = \mathrm{span}\{\mathrm{w_1} = \mathrm{v_1} + \mathrm{v_2}, \mathrm{w_2} = \mathrm{v_1} + \mathrm{v_3}, \mathrm{w_3} = \mathrm{v_2} + 3\mathrm{v_3}\}$

   a) Lo span di n generici vettori è lo spazio da essi generato, ovvero l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari.
   b) Vogliamo dimostrare che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Siano α, β e γ tali che $\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = 0$; poiché v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti, questo implica che

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\alpha + \gamma = 0$$

$$\beta + 3\gamma = 0$$

   Risolvendo il sistema si ottiene che $\alpha = \beta = \gamma = 0$ è l'unica possibile soluzione, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, la dimensione dello spazio da essi generato è tre.

4. Siano $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ e $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ le applicazioni date rispettivamente dalle matrici

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Determinare l'immagine di f. L'applicazione è suriettiva? Iniettiva?
   b) Determinare il nucleo di g. L'applicazione è iniettiva? Suriettiva?
   c) In quale ordine è possibile comporre le due applicazioni? L'applicazione composta è biunivoca?

   a) L'immagine di f è lo spazio generato dai vettori colonna della matrice F; tali vettori risultano immediatamente linearmente indipendenti per cui essi sono una base dell'immagine la cui dimensione è 3. Essendo lo spazio di arrivo di dimensione 4, l'applicazione non è dunque suriettiva. Applicando la formula di Grassmann, osserviamo che la dimensione del nucleo di f è uguale a zero per cui l'applicazione è iniettiva.
   b) Il nucleo di g è per definizione

$$\mathrm{Ker}(g) = \{v \in \mathbf{R}^4 \mid G \cdot v = \mathbf{0}\} = \{t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ t \in \mathbf{R}\}$$

La dimensione del nucleo è quindi uguale ad uno, il che implica che l'applicazione non è iniettiva. Applicando la formula di Grassmann, ricaviamo che la dimensione dell'immagine di g è quindi pari a tre, ovvero uguale a quella dello spazio di arrivo; l'applicazione è quindi suriettiva.

c) Essendo le dimensioni di dominio e codominio compatibili, le due applicazioni possono essere composte in entrambe le direzioni. Da una parte otteniamo $f \circ g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ (che non puó essere biunivoca in quanto la sua immagine è contenuta nell'immagine di f che ha dimensione 3); dall'altra invece $g \circ f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ che risulta biunivoca poiché rappresentata dalla matrice

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

che è invertibile.

5. Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ e sia $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V : x_2 = x_4\}$.

(Notiamo che $W \subset V$!)

(a) Determinare la dimensione di W.

(b) Esibire un complemento W' di W in $\mathbf{R}^4$.

(c) Dimostrare che per ogni complemento W' si ha che $\dim(V \cap W') = 1$.

a) Abbiamo che

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V : x_2 = x_4\} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \text{ e } x_2 = x_4\} =$$

$$= \{ \begin{pmatrix} t \\ s-t \\ s \\ s-t \end{pmatrix} ; s, t \in \mathbf{R}\}$$

Di conseguenza, la dimensione di W è uguale a due.

b) Una base di W è data, ad esempio dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base per un complemento è data, ad esempio, dai vettori

$$w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti risulta che $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ sono linearmente indipendenti.

c) Sappiamo che $\mathbf{R}^4 = W \oplus W'$, quindi $V = V \cap \mathbf{R}^4 = (V \cap W) \oplus (V \cap W')$. Poiché $\dim(V) = 3$ e $\dim V \cap W = 2$ (abbiamo osservato che V contiene W), dobbiamo avere $\dim(V \cap W') = 1$ per ogni possibile complemento W'.

6. (per gli studenti di Colleferro) Calcolare un'equazione parametrica della retta di equazione $x + 2y = 5$ ruotato (in senso orario) di un angolo di 45 gradi intorno al punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La rotazione (in senso orario) di un angolo di 45 gradi intorno al punto $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dalla seguente composizione di trasformazioni:

$$R_{\pi/4,P} = T_P \circ R_{\pi/4} \circ T_{-P}.$$

Mediante T_{-P} si trasla il centro di rotazione nell'origine, poi si effettua la rotazione intorno all'origine, infine mediante T_P si riporta l'origine nel punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le formule generali sono date da

$$R_{\pi/4,P}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T_P(\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2x_1 + \sqrt{2}/2x_2 - 5\sqrt{2}/2 + 3 \\ -\sqrt{2}/2x_1 + \sqrt{2}/2x_2 + \sqrt{2}/2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Un'equazione parametrica della retta $x + 2y = 5$ è data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Un'equazione parametrica della retta ruotata è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (R_{\pi/4}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix})t + R_{\pi/4,P}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$