COGNOME .... *NOME* .... Data di nascita..................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. *Siano* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ *in uno spazio vettoriale* V.

(a) Dare la definizione di lineare indipendenza per $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$*;*

(b) Verificare che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ *sono linearmente indipendenti allora lo sono anche* $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1-\mathbf{v}_3$.

(a) Tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tre vettori in uno spazio vettoriale V sono linearmente indipendenti se una loro combinazione lineare che da' il vettore nullo ha necessariamente tutti i coefficienti nulli:

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = c = 0.$$

(b) Supponiamo che sia $a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + c(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) = 0$. Questo equivale a $(a + b + c)\mathbf{v}_1 + (a - b)\mathbf{v}_2 + (a - c)\mathbf{v}_3 = 0$. Siccome $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti, necessariamente

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Dunque anche $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

2. *Dati i sottospazi* $V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \}$ *e* $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \}$ *in* $\mathbf{R}^4$,

(a) Determinare una base di $V \cap W$ *e la sua dimensione;*

(b) Determinare una base di $W + V$ *e la sua dimensione;*

(c) Dire se $V \subset W$ *o* $W \subset V$*, spiegando le risposte.*

(a) Risolvendo il sistema omogeneo $\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ troviamo $V \cap W = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$. Chiaramente il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una base di $V \cap W$ e $\dim V \cap W$.

(b) Risolvendo i sistemi che li definiscono, si trova

$$V = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \qquad W = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

Una base di $V + W$ si può ottenere applicando l'eliminazione di Gauss all'unione dei generatori di V e dei generatori di W:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base di $V+W$ è ad esempio

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

e $\dim V+W=3$.
(b) Non vale $V\subset W$ né $W\subset V$: infatti se cosí fosse si avrebbe $\dim V\cap W=2=\dim V$ oppure $\dim V\cap W=2=\dim W$.

3. *Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da* $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di F;
(b) Determinare una base di $F(V)$, dove V è il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di equazione $\{x_2-2x_3=0\}$.
(c) Determinare la dimensione di $(\ker F)\cap V$, giustificando la risposta.

(a) Ponendo $F(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, si trova $\ker F=\operatorname{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}$ e $\dim\ker F=1$. L'immagine $F(\mathbf{R}^3)$ è generata dalle colonne della matrice rappresentativa di F: in questo caso ci sono due colonne non nulle e linearmente indipendenti. Dunque una base di $F(\mathbf{R}^3)$ è data da $\{\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\}$.
(b) $V=\operatorname{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\}$ e $\dim V=2$. Inoltre $F(V)=\operatorname{span}\{F(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}),F(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix})\}=\operatorname{span}\{\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\}$.
Chiaramente $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ è una base di $F(V)$ e $\dim F(V)=1$.
(c) $\dim(\ker F)\cap V=\dim V-\dim F(V)=2-1=1$.

4. *Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ un'applicazione lineare. Siano $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ autovettori di F di autovalori $\lambda_1=3$ e $\lambda_2=4$, rispettivamente.*
(a) Determinare la matrice rappresentativa di F nella base $\mathcal{B}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ (in dominio e codominio);
(b) Determinare la matrice rappresentativa di F nella base canonica (in dominio e codominio).

(a) Poiché $F(\mathbf{v}_1)=3\mathbf{v}_1$ e $F(\mathbf{v}_2)=4\mathbf{v}_2$, nella base $\mathcal{B}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ (in dominio e codominio) la matrice rappresentativa di F è data da $M=\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}$.
(b) Dal diagramma

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2,\mathcal{C} & \xrightarrow{A=?} & \mathbf{R}^2,\mathcal{C}\\ \downarrow{\scriptstyle C_{\mathcal{C},\mathcal{B}}} & & \uparrow{\scriptstyle C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}}\\ \mathbf{R}^2,\mathcal{B} & \xrightarrow{M} & \mathbf{R}^2,\mathcal{B}\end{array}$$

ricaviamo la matrice rappresentativa di F nella base canonica (in dominio e codominio)

$$A=C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\cdot M\cdot C_{\mathcal{C},\mathcal{B}}=C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\cdot M\cdot C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1},$$

dove $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$ e $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$. In conclusione, $A=\begin{pmatrix}3&0\\-1&4\end{pmatrix}$.

5. *Sia* $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare data da* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare autovalori e autospazi di F*.*
(b) Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti e dire se F *è diagonalizzabile.*
(c) Determinare se F *è iniettiva.*

(a) Il polinomio caratteristico di F è dato da $P(\lambda) = \det(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}) = -\lambda(\lambda-1)^2$, da cui gli autovalori di F sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ (con molteplicità due). L'autospazio V_0 è il nucleo di F, ed è stato calcolato nell'esercizio precedente:

$$V_0 = \ker F = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

L'autospazio V_1 è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e risulta

$$V_1 = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

(b) Un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti è dato da

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

Poiché non sono in numero sufficiente a formare una base di $\mathbf{R}^3$, l'applicazione non è diagonalizzabile.

(c) Poiché $V_0 = \ker F \neq \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$, l'applicazione non è iniettiva.