COGNOME .... *NOME* .... Data di nascita..................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ una base di $\mathbf{R}^3$ e $\mathcal{C}$ la base canonica. Consideriamo l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ avente i vettori di $\mathcal{B}$ come autovettori di autovalori rispettivamente $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 3$.
   a) Scrivere la definizione di autovalore di un'applicazione lineare L di uno spazio vettoriale V in sé.
   b) Scrivere la matrice dell'applicazione F nella base canonica di $\mathbf{R}^3$ (in dominio e codominio).
   c) L'applicazione F è iniettiva?

(a) Si dice autovalore di un'applicazione lineare $F : V \to V$, uno scalare $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che esista un vettore non nullo $v \in V$ che verifichi $F(v) = \lambda v$.

(b) Per ipotesi, la matrice M di F in $\mathcal{B}$ e la matrice C del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ alla base canonica sono date da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo $C^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Abbiamo il diagramma commutativo seguente

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3_{\mathcal{B}} & \underset{M}{\rightarrow} & \mathbf{R}^3_{\mathcal{B}} \\ C^{-1} \uparrow & & \downarrow C\,. \\ \mathbf{R}^3_{\mathcal{C}} & \overset{N}{\rightarrow} & \mathbf{R}^3_{\mathcal{C}} \end{array}$$

La matrice N di F nella base canonica $\mathcal{C}$ é quindi data da

$$N = CMC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Osserviamo che $\mathrm{Ker}(F) = V_0$, l'autospazio relativo all'autovalore 0. In questo caso $\lambda = 0$ non é un autovalore per cui F é iniettiva.

2. Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e siano

$$V = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   a) Determinare una base del nucleo di F.
   b) Dire, giustificando la risposta, se l'applicazione F ristretta a V (cioè $F : V \to \mathbf{R}^3$) è iniettiva.
   c) Determinare una base e la dimensione di $F(V) \cap W$.

(a) Sappiamo che in questo caso

$$\mathrm{Ker}(F) = \{v \in \mathbf{R}^3 \mid F(v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \; ; \; t \in \mathbf{R} \right\}.$$

Quindi, una base di $\mathrm{Ker}(F)$ é data da $\mathcal{B}_K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) Il nucleo di F ristretta a V é dato dagli elementi di V che sono in $\mathrm{Ker}(F)$, ovvero da $\mathrm{Ker}(F) \cap V$. In questo caso $\mathrm{Ker}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \; ; \; t \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 = -x_2 = x_3 \right\}$. Quindi

$$\mathrm{Ker}(F) \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha + \beta = \alpha \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \; ; \; \alpha \in \mathbf{R} \right\} \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ne segue che F ristretta a V non é iniettiva.

(c) Calcoliamo

$$F(V) = \mathrm{Span}\left\{ F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \; F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Osserviamo che

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 2 \neq 0.$$

Il vettore che genera $F(V)$ é dunque linearmente indipendente dai generatori di W, il che implica che $F(V) \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Siano $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 0 \}$, $\quad W = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$.

(a) Richiamare la definizione di sottospazio di uno spazio vettoriale V.
(b) Dimostrare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$ (usando la definizione).
(c) Disegnare U e W e dire se $\mathbf{R}^2 = U \oplus W$ (giustificare bene la risposta).

(a) Un sottospazio di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme non vuoto $S \subset V$, chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare:

$$\forall x, y \in S \quad \Rightarrow \quad x + y \in S; \qquad \forall x \in S, \; \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda x \in S.$$

(b) Nel nostro caso, $U = \{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \; a \in \mathbf{R} \}$:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+b \end{pmatrix} \in U; \qquad \lambda \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda a \end{pmatrix} \in U.$$

Dunque U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$, di dimensione uno, e coincide con la retta per l'origine individuata dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$U = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Anche W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$, di dimensione uno, e coincide con la retta per l'origine individuata dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Si vede (dal disegno) e si verifica facilmente che $U \cap W = \{0\}$. Dalle formule di Grassmann segue che $\dim U + W = 1 + 1 = 2$; in particolare $U + W = \mathbf{R}^2$ e la somma è diretta, visto che $U \cap W = \{0\}$.

4. Siano $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 0\}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare se $\mathcal{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sono basi di W.
(b) Determinare un sottospazio W^c complementare di W in $\mathbf{R}^4$.
(c) Determinare la dimensione di $U = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} + W^c$.

(a) Osserviamo innanzitutto che W ha dimensione 3, in quanto definito da una equazione non banale in $\mathbf{R}^4$. Dunque una qualunque base di W deve avere cardinalità tre. Poiché $\mathcal{A} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ha solo due elementi, non può essere una base di W. I vettori di $\mathcal{B}$ sono tre e sono linearmente indipendenti, ma $\mathbf{v}_3$ non appartiene a W. Dunque neanche $\mathcal{B}$ è una base di W.

(b) Un sottospazio complementare di W in $\mathbf{R}^4$, è un sottospazio W^c di $\mathbf{R}^4$ di dimensione uno tale che $W^c \cap W = \{O\}$. Come generatore di W^c, si può prendere un qualunque vettore non nullo che non appartiene a W. Ad esempio, $W^c = \text{span}\{\mathbf{v}_3\}$.

(c) I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti e appartengono a W. Dunque $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset W$. Ne segue che $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \cap W^c \subset W \cap W^c = \{O\}$ e

$$\dim U = \dim(\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} + W^c) = \dim \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} + \dim W^c = 2 + 1 = 3.$$