GEOMETRIA e ALGEBRA 1/bis (Monsurrò-Geatti) APPELLO 1 Roma, 29 novembre 2005, ore 11–13.

COGNOME .... *NOME* .... Data di nascita..................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una sua base. Consideriamo i sottospazi

$$U = \text{Span}\{v_1 + v_2,\ v_1 - v_2\}, \quad W = \text{Span}\{v_2 + v_3,\ v_2 - v_3\}.$$

a) Dimostrare che $V = U + W$.
b) Dire, giustificando la risposta, se si tratta o meno di una somma diretta.

(a) Sappiamo che $U + W \subset V = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$. Basta quindi dimostrare che v_1, v_2 e v_3 appartengono a $U + W$.

$$v_1 = 1/2(v_1 + v_2) + 1/2(v_1 - v_2) \quad v_2 = 1/2(v_1 + v_2) - 1/2(v_1 - v_2)$$

$$v_3 = 1/2(v_2 + v_3) - 1/2(v_2 - v_3)$$

(b) Affinché la somma sia diretta, dobbiamo avere $U \cap W = \{0\}$. Se ció fosse vero, avremmo $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) = 2 + 2 = 4 > \dim(V)$ il che é una contraddizione. La somma quindi NON é diretta.

2. Siano $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ e $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ le applicazioni lineari definite rispettivamente da

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad G\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_3 \\ 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare l'applicazione composta $F \circ G$.
b) Richiamare la definizione di nucleo di un'applicazione lineare $L\colon V \to W$.
c) Determinare una base del nucleo di $F \circ G$ e la sua dimensione. Qual è la dimensione dell'immagine di $F \circ G$?

a) Calcoliamo la matrice dell'applicazione composta $F \circ G$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Si dice nucleo di un'applicazione lineare L l'insieme degli elementi di V la cui immagine tramite L é il vettore nullo di W; in simboli

$$\text{Ker}(L) = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$$

(c) Il nucleo di $F \circ G$ é dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $M \cdot X = 0$ dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Le soluzioni sono dunque della forma

$$\text{Ker}(F \circ G) = \{\begin{pmatrix} s \\ t \\ -(s + t) \end{pmatrix} \ ;\ s, t \in \mathbf{R}\}.$$

Pertanto, la dimensione del nucleo è due e una base è data da

$$\mathcal{B}_K = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Si deduce che la dimensione dell'immagine è $3-2=1$.

3. Sia S il sottospazio delle matrici 2×2 dato da $S=\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbf{R}\}$.

(a) Determinare se $\mathcal{A}=\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$ è una base di S. Giustificare bene la risposta.

(b) Determinare se $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ appartiene ad S.

(c) Verificare che $N=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene a span$\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$. In quanti modi N può essere scritta come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{A}$? Giustificare bene la risposta.

(a) Mettendo in evidenza i coefficienti delle matrici in S, troviamo

$$S=\mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}.$$

Si vede subito che i generatori trovati sono linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad a=b=c=0.$$

Da ciò segue che $\dim S=3$. Anche gli elementi di $\mathcal{A}$ sono linearmente indipendenti:

$$a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad a=b=0.$$

Essi non formano una base di S, poiché possono solo generare un sottospazio di dimensione 2, mentre $\dim S=3$.

(b) $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\notin S$, poiché la somma degli elementi della diagonale principale di M non è zero.

(c) Cerchiamo $a,b\in\mathbf{R}$ tali per esprimere N come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{A}$:

$$a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La soluzione è $a=b=1$. Dunque $N\in\mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$ e si scrive così in modo unico, in quanto gli elementi di $\mathcal{A}$ sono linearmente indipendenti.

4. Sia $F\colon\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare autovalori e autospazi di F.

(b) Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti e dire se F è diagonalizzabile.

(c) Determinare se F è iniettiva, suriettiva, invertibile.

(a) Il polinomio caratteristico di A è dato da $P_\lambda(A)=\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)$ ed ha radici $\lambda=0$, doppia, e $\lambda=2$. Gli autospazi corrispondenti sono dati da

$$V_0=\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+x_3=0 \end{cases}\}=\mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\},$$

e

$$V_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \} = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

(b) Poiché $\dim V_0 = \dim V_2 = 1$, un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti contiene 2 autovettori $\{v_1, v_2\}$, con $v_1 \in V_0$ e $v_2 \in V_2$; ad esempio

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

In particolare, non esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di Fe l'applicazione F non è diagonalizzabile. Osserviamo che $\dim V_0 = 1$, mentre la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 0$ è due.
(c) Poiché $\dim \ker F = \dim V_0 = 1 > 0$, l'applicazione F non è iniettiva, né suriettiva: infatti $\dim F(\mathbf{R}^3) = \dim \mathbf{R}^3 - \dim \ker F < 3$. Da cui neanche biiettiva.