

(1) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare le formule per la traslazione $T_{\mathbf{p}}$.

(ii) Calcolare $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(iii) Calcolare $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(iv) Calcolare $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Sol. (i) Si ha

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 2 \\ x_3 + 3 \end{pmatrix}$$

(ii) Applicando la formula trovata in (i), troviamo

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(iii) Si ha

$$T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

(iv) Si ha

$$(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T_{\mathbf{q}+3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad (T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = T_{3\mathbf{p}-\mathbf{q}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

(2) Sia A la matrice 3×3 data da

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che A è una matrice ortogonale.

(ii) Calcolare autovalori e autospazi di A .

(iii) Interpretare geometricamente l'isometria $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $X \mapsto AX$.

Sol. (i) Dobbiamo mostrare che $A^T A = \text{Id}_3$, dove A^T indica la trasposta di A e Id_3 è la matrice identità 3×3 , ovvero che

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La verifica di questo fatto è immediata.

(ii) Si ha $\det(A - \lambda \text{Id}_3) = -(\lambda^3 - \frac{5}{3}\lambda^2 + \frac{5}{3}\lambda - 1) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + 1)$. Questo polinomio ha una sola radice reale: $\lambda = 1$, che è pertanto l'unico autovalore reale della matrice A . Si noti come $\lambda = 1$ dovesse necessariamente essere un autovalore di A in quanto A è una matrice ortogonale con determinante uguale ad 1. L'1-autospazio di A è una retta in quanto la dimensione di ogni autospazio è almeno 1 e non può superare la molteplicità geometrica dell'autovalore corrispondente. Per determinare la direzione di questa retta risolviamo l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$, ovvero

$$\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione di questo sistema è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(iii) Poichè A è una matrice ortogonale con determinante positivo, essa rappresenta geometricamente la rotazione attorno ad un asse. L'asse di rotazione di F è stato determinato nel punto (ii): si tratta della retta r generata dal vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Per determinare l'angolo di rotazione basta determinare gli autovalori

complessi di A . Risolvendo l'equazione $\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + 1 = 0$ troviamo $\lambda_{1/2} = \frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{-1}$, pertanto l'angolo θ di rotazione è l'angolo individuato da

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{3} \\ \sin \theta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

L'ambiguità nel segno di θ dipende dal fatto che non c'è un orientamento preferenziale sul piano r^\perp che ci permetta di dire "questa rotazione è positiva, quest'altra è negativa". Tutto dipende da che parte si guarda il piano r^\perp : un orientamento su r^\perp è infatti indotto dalla scelta di un orientamento su r , è questa scelta è arbitraria. Si noti però come, una volta fatta questa scelta l'orientamento positivo su r^\perp è univocamente determinato e l'ambiguità nel segno di θ scompare.

(3) Sia A la matrice 3×3 data da

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Far vedere che A è una matrice ortogonale.
- (ii) Calcolare autovalori e autospazi di A .
- (iii) Interpretare geometricamente l'isometria $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $X \mapsto AX$.

Sol. (i) E' del tutto analogo all'esercizio precedente.

(ii) Si ha $\det(A - \lambda \text{Id}_3) = -(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$. La matrice A ha pertanto due autovalori: l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore -1 con molteplicità algebrica 1. Per determinare l'1-autospazio di A risolviamo l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ovvero

$$\begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La cui soluzione è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t_i \in \mathbf{R}.$$

L'1-autospazio è pertanto un piano, che indicheremo con π . Il (-1) -autospazio è necessariamente la retta π^\perp , che è generata dal vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(iv) L'isometria F è la simmetria rispetto al piano π .

(4) Sia C il cubo in \mathbf{R}^3 di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno al vettore \mathbf{e}_3 ?
- (ii) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione R_{π} intorno al vettore \mathbf{e}_3 ?
- (iii) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione $R_{3\pi/2}$ intorno al vettore \mathbf{e}_3 ?
- (iv) Quali sono i vertici di C dopo la dilatazione $D_{1,3,2}$?
- (v) Quali sono i vertici di C dopo l'omotetia D_3 ?
- (vi) Quali sono i vertici di C dopo lo shear $N_{1,0,3}$?

Sol. (i) Ricordiamo che la rotazione di angolo φ attorno al vettore \mathbf{e}_3 è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque la rotazione di angolo $\pi/2$ attorno al vettore \mathbf{e}_3 è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ed è immediato scrivere quali sono i vertici del cubo C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.

(ii) In modo analogo si trova che la rotazione di angolo π attorno al vettore \mathbf{e}_3 è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ed è immediato scrivere quali sono i vertici del cubo C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.

(iii) La rotazione di angolo $3\pi/2$ attorno al vettore \mathbf{e}_3 è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ed è immediato scrivere quali sono i vertici del cubo C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.

(5) Sia C il cubo in \mathbf{R}^3 di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a \mathbf{e}_3 .

- (ii) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a \mathbf{e}_1 .
- (iii) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $-\mathbf{e}_1$.
- (iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?
- (v) Disegnare l'immagine di C dopo la dilatazione $D_{1,3,2}$?
- (vi) Disegnare l'immagine di C dopo l'omotetia D_3 ?
- (vii) Disegnare l'immagine di C dopo lo shear $N_{1,0,3}$?

Sol. (i) La rotazione di angolo $\pi/2$ attorno al vettore \mathbf{e}_3 è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

dunque il cubo C viene mandato in se stesso da questa rotazione.

(ii) La rotazione di angolo $\pi/2$ attorno al vettore \mathbf{e}_1 è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

dunque il cubo C viene mandato in se stesso da questa rotazione.

(iii) La rotazione di angolo $\pi/2$ attorno al vettore $-\mathbf{e}_1$ coincide con la rotazione di angolo $-\pi/2$ attorno al vettore \mathbf{e}_1 è data pertanto da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Il cubo C viene mandato in se stesso da questa rotazione.

(iv) Si vede facilmente che, se R è una rotazione che manda C in se stesso, allora l'asse di R è di uno dei seguenti tre tipi: *i*) è l'asse che unisce i centri di due facce opposte (in questo caso questi assi coincidono con gli assi coordinati); *ii*) è l'asse che unisce i centri di due lati opposti; *iii*) è l'asse che unisce i due vertici opposti di C . Indichiamo questi assi con le lettere a , b e c rispettivamente. Rimangono da determinare gli angoli delle rotazioni attorno a questi assi. Per quanto riguarda le rotazioni attorno agli assi di tipo a si vede facilmente che gli angoli devono essere della forma $k\pi/2$, con $k \in \mathbf{Z}$. La rotazione attorno ad un asse di tipo b deve mandare i lati che quest'asse interseca in se stessi. Deve pertanto essere una rotazione di angolo $k\pi$, con $\pi \in \mathbf{Z}$. Restano da studiare le rotazioni attorno agli assi di tipo c . Si vede facilmente che i tre lati di C che partono da un vertice sono simmetrici rispetto all'asse di tipo c per quel vertice. La rotazione attorno a quell'asse deve permutare tra loro questi tre lati. Deve pertanto essere una rotazione di angolo $2k\pi/3$, con $k \in \mathbf{Z}$.

(6) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.

- (i) Trovare le formule per la rotazione $R_{\pi/2, \mathbf{v}}$ di un angolo $\pi/2$ intorno a \mathbf{v} .
- (ii) Trovare le formule per la rotazione $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}$ di un angolo $-\pi/4$ intorno a \mathbf{v} .
- (iii) Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando $R_{\pi/2, \mathbf{v}}$ a l .

(iv) Sia π il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica del piano che si ottiene applicando $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}$ a π .

Sol. (i) Una base ortogonale di \mathbf{R}^3 avente \mathbf{v} come primo vettore ed orientata concordemente con la base canonica di \mathbf{R}^3 è

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Normalizzandola troviamo la base ortonormale

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

La matrice che rappresenta la rotazione di angolo $\pi/2$ attorno al vettore \mathbf{v} nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto, la matrice che rappresenta la rotazione di angolo $\pi/2$ attorno al vettore \mathbf{v} nella base canonica di \mathbf{R}^3 è

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1} = \\ & = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 \\ 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 \\ 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) La matrice che rappresenta la rotazione di angolo $-\pi/4$ attorno al vettore \mathbf{v} nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Pertanto, la matrice che rappresenta la rotazione di angolo $-\pi/4$ attorno al vettore \mathbf{v} nella base canonica di \mathbf{R}^3 è

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1} = \\ & = \begin{pmatrix} 1/3 + \sqrt{2}/3 & 1/3 - \sqrt{2}/6 - \sqrt{6}/6 & 1/3 - \sqrt{2}/6 + \sqrt{6}/6 \\ 1/3 - \sqrt{2}/6 + \sqrt{6}/6 & 1/3 + \sqrt{2}/3 & 1/3 - \sqrt{2}/6 - \sqrt{6}/6 \\ 1/3 - \sqrt{2}/6 - \sqrt{6}/6 & 1/3 - \sqrt{2}/6 + \sqrt{6}/6 & 1/3 + \sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(iii) L'equazione parametrica cercata è

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 \\ 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 \\ 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \\ 2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 - \sqrt{3}/3 \\ 4/3 + \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativamente, dati 2 punti distinti \mathbf{p} e \mathbf{q} su l , la retta cercata è la retta per i punti $R_{\pi/2, \mathbf{v}}(\mathbf{p})$ e $R_{\pi/2, \mathbf{v}}(\mathbf{q})$.

(iv) L'equazione cartesiana di π si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 7$$

Poiché $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}$ è un'isometria abbiamo

$$(R_{-\pi/4, \mathbf{v}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \cdot (R_{-\pi/4, \mathbf{v}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = 7,$$

per ogni vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ di π . Il vettore a destra in questo prodotto scalare è il generico elemento del piano $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}\pi$; questo significa che il piano $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}\pi$ ha equazione cartesiana

$$(R_{-\pi/4, \mathbf{v}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 7$$

Si ha

$$\begin{pmatrix} 1/3 + \sqrt{2}/3 & 1/3 - \sqrt{2}/6 + \sqrt{6}/6 & 1/3 - \sqrt{2}/6 - \sqrt{6}/6 \\ 1/3 - \sqrt{2}/6 - \sqrt{6}/6 & 1/3 + \sqrt{2}/3 & 1/3 - \sqrt{2}/6 + \sqrt{6}/6 \\ 1/3 - \sqrt{2}/6 + \sqrt{6}/6 & 1/3 - \sqrt{2}/6 - \sqrt{6}/6 & 1/3 + \sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 + \sqrt{2}/6 - \sqrt{6}/6 \\ 2/3 + \sqrt{2}/6 + \sqrt{6}/6 \\ 2/3 - \sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$$

Dunque il piano $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}\pi$ ha un'equazione cartesiana della forma

$$(2/3 + \sqrt{2}/6 - \sqrt{6}/6)x_1 + (2/3 + \sqrt{2}/6 + \sqrt{6}/6)x_2 + (2/3 - \sqrt{2}/3)x_3 = 7.$$

Alternativamente, dati 3 punti distinti \mathbf{p} , \mathbf{q} e \mathbf{r} su π , il piano cercato è il piano per i 3 punti $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}(\mathbf{p})$, $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}(\mathbf{q})$ e $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}(\mathbf{r})$.

- (7) Sia π il piano di equazione $x_1 + 2x_2 = 0$.
- (i) Calcolare le formule della riflessione rispetto a π .
 - (ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Sol. (i) La direzione ortogonale a π è generata dal vettore $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ di norma 1; una base ortonormale di π è data dai due vettori $\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Indichiamo con \mathcal{B} la base ortonormale di \mathbf{R}^3 data dai tre vettori

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice che rappresenta la simmetria S_π rispetto alla base \mathcal{B} è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice che rappresenta S_π rispetto alla base canonica di \mathbf{R}^3 è la matrice

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ovvero

$$S_\pi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ -4x_1 - 3x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(ii) Mediante la formula trovata nel punto (i), si calcola facilmente che le immagini dei punti dati sono, rispettivamente,

$$\begin{pmatrix} -4/5 \\ -3/5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -7/5 \\ 1/5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) L'equazione parametrica cercata è

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(8) Sia C il cubo dell'Eserc.4. Calcolare l'immagine di C dopo la riflessione rispetto

- (i) al piano (x_1, x_2) .
- (ii) al piano (x_2, x_3) .
- (iii) al piano di equazione $x_1 = x_2$.

Sol. (i) La simmetria rispetto al piano (x_1, x_2) è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

L'immagine di C si calcola immediatamente mediante questa formula.

(ii) La simmetria rispetto al piano (x_2, x_3) è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(iii) La simmetria rispetto al piano di equazione $x_1 = x_2$ è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Il cubo C viene mandato in se stesso da questa simmetria.

(9) Sia C il cubo dell'Eserc.5. Calcolare l'immagine di C dopo la riflessione rispetto

- (i) al piano (x_1, x_2) .
- (ii) al piano (x_2, x_3) .
- (iii) al piano di equazione $x_1 = x_2$.

(iv) Trovare tutte le riflessioni S_π che mandano C in se stesso.

Sol. (i) Coincide con C .

(ii) Coincide con C .

(iii) Coincide con C .

(iv) Si tratta delle riflessioni rispetto ai piani ortogonali agli assi di rotazione descritti nella soluzione dell'esercizio (5.iv).

(10) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare la formula per la riflessione $U_{\mathbf{p}}$ rispetto al punto \mathbf{p} .

(ii) Calcolare la formula per la riflessione $U_{\mathbf{q}}$ rispetto al punto \mathbf{q} .

(iii) Calcolare le formule per la trasformazione $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$ e per $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$.

(iv) Geometricamente, che cosa fanno le trasformazioni $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$ e $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$?

Sol. (i) Si ha $U_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathbf{p} - (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = -\mathbf{x} + 2\mathbf{p}$. In coordinate,

$$U_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ -x_2 + 2 \\ -x_3 - 2 \end{pmatrix}$$

(ii) Analogamente $U_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} + 2\mathbf{q}$. In coordinate,

$$U_{\mathbf{q}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ -x_2 - 2 \\ -x_3 - 2 \end{pmatrix}$$

(iii) Si ha

$$(U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}})(\mathbf{x}) = U_{\mathbf{p}}(U_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})) = U_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ -x_2 - 2 \\ -x_3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 4 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}})(\mathbf{x}) = U_{\mathbf{q}}(U_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})) = U_{\mathbf{q}} \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ -x_2 + 2 \\ -x_3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 4 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(iv) Si ha $(U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}})(\mathbf{x}) = U_{\mathbf{p}}(-\mathbf{x} + 2\mathbf{q}) = -(-\mathbf{x} + 2\mathbf{q}) + 2\mathbf{p} = \mathbf{x} + 2(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = T_{2(\mathbf{p}-\mathbf{q})}(\mathbf{x})$ ovvero $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$ è la traslazione di vettore $2(\mathbf{p} - \mathbf{q})$. Scambiando il ruolo di \mathbf{p} e \mathbf{q} si vede che $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$ è la traslazione di vettore $2(\mathbf{q} - \mathbf{p})$.

(11) Sia π il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbf{R}$$

e sia π' il piano di equazione $x_3 = 0$.

(i) Trovare le formule della riflessione S_π rispetto a π .

(ii) Calcolare le formule della riflessione $S_{\pi'}$ rispetto a π' .

(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S_\pi \circ S_{\pi'}.$$

(iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S_{\pi'} \circ S_\pi.$$

Sol. (i) Il piano π ha equazione cartesiana $-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$, ed un vettore ortogonale a π è dato da $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un generico vettore di \mathbf{R}^3 . La retta per P e perpendicolare a π è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Essa interseca π nel punto

$$Q = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_0 = (3a - 2b - c)/14.$$

Il simmetrico di P rispetto al piano π è il punto che si ottiene in corrispondenza del valore del parametro $2t_0 = (3a - 2b - c)/7$, cioè

$$S_\pi \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + 2t_0 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + (3a - 2b - c)/7 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2a + 6b + 3c \\ 6a + 3a - 2c \\ 3a - 2b + 6c \end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice che rappresenta S_π rispetto alla base canonica di \mathbf{R}^3 è data da

$$\begin{pmatrix} -2/7 & 6/7 & 3/7 \\ 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \end{pmatrix}.$$

(ii) La riflessione rispetto a π' è rappresentata, nella base canonica di \mathbf{R}^3 dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$S_{\pi'} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

(iii) La trasformazione composta $S_\pi \circ S_{\pi'}$ è rappresentata (rispetto alla base canonica di \mathbf{R}^3) dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -2/7 & 6/7 & 3/7 \\ 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 & 6/7 & -3/7 \\ 6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 3/7 & -2/7 & -6/7 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$(S_\pi \circ S_{\pi'}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}$$

(iv) La trasformazione composta $S_{\pi'} \circ S_\pi$ è rappresentata (rispetto alla base canonica di \mathbf{R}^3) dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/7 & 6/7 & 3/7 \\ 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 & 6/7 & 3/7 \\ 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ -3/7 & 2/7 & -6/7 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$(S_{\pi'} \circ S_{\pi}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ -3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}$$

(12) Sia $D_{2,5,3}$ la dilatazione data dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- (i) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ tale che $D_{\lambda,\mu,\rho} \circ D_{2,5,3}$ sia l'applicazione identica.
(ii) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ tale che $D_{2,5,3} \circ D_{\lambda,\mu,\rho}$ sia l'applicazione identica.

Sol. Osserviamo innanzitutto che le dilatazioni commutano fra loro: date due dilatazioni $D_{\lambda,\mu,\nu}$ e $D_{\rho,\sigma,\tau}$, si ha

$$D_{\lambda,\mu,\nu} \circ D_{\rho,\sigma,\tau} = D_{\rho,\sigma,\tau} \circ D_{\lambda,\mu,\nu} = D_{\rho\lambda,\sigma\mu,\tau\nu}.$$

(i)(ii) La dilatazione $D_{1/2,1/5,1/3}$, che è l'inversa di $D_{2,5,3}$, soddisfa $D_{1/2,1/5,1/3} \circ D_{2,5,3} = D_{2,5,3} \circ D_{1/2,1/5,1/3} = Id$.

(13) Dimostrare che una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ conserva le direzioni delle rette e dei piani se e solo se $\lambda = \mu = \rho$.

Sol. Se $\lambda = \mu = \nu$, la dilatazione $D_{\lambda,\lambda,\lambda}$ conserva gli angoli fra i vettori e quindi le direzioni delle rette e dei piani:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} = \frac{\lambda \mathbf{v} \cdot \lambda \mathbf{w}}{\|\lambda \mathbf{v}\| \|\lambda \mathbf{w}\|}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3. \quad (*)$$

D'altra parte, se ad esempio $\lambda \neq \mu$, la dilatazione $D_{\lambda,\mu,\nu}$ non conserva gli angoli fra i vettori e quindi ne anche le direzioni delle rette o dei piani: basta provare per esempio con $\lambda = 4$, $\mu = \nu = 1$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(14) Determinare l'inversa della trasformazione (shear) $N_{1,1,1}$.

Sol. L'inversa $N_{1,1,1}^{-1}$ è data dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pertanto

$$N_{1,1,1}^{-1} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x - 3 \end{pmatrix}.$$