

(1.A) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- (i) Calcolare e disegnare i vettori \mathbf{x} , $2\mathbf{x}$, $-\mathbf{x}$, $0\mathbf{x}$.
- (ii) Calcolare e disegnare i vettori $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $3\mathbf{y}$ e $3\mathbf{x} - \mathbf{y}$.
- (iii) Calcolare $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Sol.

(i) $2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $0\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $3\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $3\mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

(iii) $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{5}$, $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{10}$, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 1$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{29}$.

(1.B) (*Trigonometria elementare*) Sia $\varphi \in \mathbf{R}$ un angolo. Il seno ed il coseno di φ sono, per definizione, le coordinate del vettore \mathbf{x} di norma $\|\mathbf{x}\| = 1$, che forma un angolo φ con l'asse delle ascisse positive.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

- (i) Dimostrare che $|\sin \varphi| \leq 1$ e $|\cos \varphi| \leq 1$.
- (ii) Dimostrare che $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$.

Sol. Per definizione di norma di un vettore, $1 = \|\mathbf{x}\|^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$, il che prova (ii) e, come conseguenza immediata, anche (i).

(1.C) (*La regola del coseno*) Sia ABC un triangolo con lati di lunghezza a , b , c ed angoli α , β e γ . Sia Q la proiezione ortogonale di C sul lato AB .

- (i) Far vedere che $|CQ| = b \sin \alpha$ e $|AQ| = b \cos \alpha$.
- (ii) Applicare il Teorema di Pitagora al triangolo CQB e dedurre la relazione

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Sol. (i) E' immediato dalla definizione di seno e coseno di un angolo e dal fatto che triangoli con angoli uguali sono simili.

(ii) Abbiamo

$$\overline{BC}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{QC}^2 = (\overline{AB} - \overline{AQ})^2 + \overline{QC}^2$$

da cui

$$a^2 = (c - b \cos \alpha)^2 + (b \sin \alpha)^2 = c^2 + b^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

(1.D) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (i) Calcolare il coseno dell'angolo φ fra i vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} .
- (ii) Calcolare il coseno dell'angolo φ fra i vettori \mathbf{x} e $-\mathbf{y}$.
- (iii) Calcolare il coseno dell'angolo φ fra i vettori \mathbf{x} e $-2\mathbf{y}$.

Sol. (i) Dalla formula

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$$

si ottiene immediatamente $\cos \varphi = 8/17$.

- (ii) $\cos \varphi = -8/17$.
- (iii) $\cos \varphi = -8/17$.

(1.E) Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Trovare un vettore $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ tale che l'angolo fra \mathbf{x} e \mathbf{y} sia uguale a $\pi/3$.

Sol. Indichiamo con φ l'angolo formato dal vettore \mathbf{x} con l'asse delle ascisse, di modo che $\mathbf{x} = (\|\mathbf{x}\| \cos \varphi, \|\mathbf{x}\| \sin \varphi)$.
 Dato che $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{17}$, otteniamo $(1, 4) = (\sqrt{17} \cos \varphi, \sqrt{17} \sin \varphi)$, da cui

$$\begin{cases} \cos \varphi = 1/\sqrt{17} \\ \sin \varphi = 4/\sqrt{17} \end{cases}$$

I vettori che formano con \mathbf{x} un angolo di $\pi/3$ sono tutti e soli quelli della forma

$$\mathbf{y} = (\rho \cos(\varphi + \pi/3), \rho \sin(\varphi + \pi/3)), \quad \rho > 0$$

Ma

$$\cos(\varphi + \pi/3) = \cos \varphi \cos(\pi/3) - \sin \varphi \sin(\pi/3) = (1 - 4\sqrt{3}) / (2\sqrt{17})$$

$$\sin(\varphi + \pi/3) = \sin \varphi \cos(\pi/3) + \cos \varphi \sin(\pi/3) = (4 + \sqrt{3}) / (2\sqrt{17})$$

Se prendiamo $\rho = 2\sqrt{17}$ troviamo il vettore

$$\mathbf{y} = (1 - 4\sqrt{3}, 4 + \sqrt{3})$$

(1.F) Trovare $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ non nulli tali che

(i) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

(ii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 0$.

(iii) $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$.

Sol. (i) I vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} devono essere allineati e concordi.

(ii) L'unico vettore di norma zero è il vettore nullo: deve essere $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$.

(iii) La regola del parallelogramma mostra che \mathbf{x} e \mathbf{y} devono essere due vettori della stessa lunghezza che formano un angolo di $2\pi/3$.

(1.G) Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ e sia \mathbf{p} il vettore

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)/2 \\ (x_2 + y_2)/2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare la distanza $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$ di \mathbf{p} da \mathbf{x} e la distanza $\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\|$ di \mathbf{p} da \mathbf{y} .

(ii) Calcolare la distanza $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ da \mathbf{x} a \mathbf{y} . Far vedere che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{p}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

(iii) Dedurre che \mathbf{p} è il punto medio fra \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Sol. (i) Si calcola facilmente

$$\mathbf{x} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} (x_1 - y_1)/2 \\ (x_2 - y_2)/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

da cui $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| = (1/2)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = (1/2)\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_1y_1 - 2x_2y_2}$. In modo analogo

$$\mathbf{y} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} (-x_1 + y_1)/2 \\ (-x_2 + y_2)/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

da cui $\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\| = (1/2)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = (1/2)\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_1y_1 - 2x_2y_2}$.

(ii) E' immediato da quanto calcolato nel punto (i).

(iii) Dal punto (ii) segue che i tre punti \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{p} sono allineati. Inoltre le due equazioni

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| = (1/2)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\| = (1/2)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

implicano che \mathbf{p} è il punto medio fra \mathbf{x} e \mathbf{y} .

(1.H) Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$.

- (i) Calcolare $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.
- (ii) Dimostrare che

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi.$$

Sol. (i) Si ha

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi.$$

(ii) L'angolo compreso tra i vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} è $\varphi - \psi$, da cui

$$\cos(\varphi - \psi) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

in quanto \mathbf{x} e \mathbf{y} hanno entrambi norma uguale ad uno.

(1.I) Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ un vettore non nullo. Dimostrare che $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ è un vettore di norma 1.

Sol. Poiché il prodotto scalare è bilineare, per ogni vettore \mathbf{x} e ogni scalare $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha

$$(\lambda \mathbf{x}) \cdot (\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \lambda^2 \|\mathbf{x}\|^2,$$

da cui

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|.$$

Prendendo $\lambda = 1/\|\mathbf{x}\|$ otteniamo

$$\left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \|\mathbf{x}\| = 1.$$