1. Determinare la tavola della verità di ciascuna delle seguenti forme proposizionali:
   (a) $p \Rightarrow (\neg q \vee r)$; (b) $\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$; (c) $(p \Rightarrow q) \vee (\neg p \Rightarrow r)$;
   (d) $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$; (e) $(p \Leftrightarrow q) \vee (\neg q \Leftrightarrow r)$; (f) $(\neg p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$;
   (g) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow s$ ; (h) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow s)$.

*Sol.*
(a)

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg q \vee r$ | $p \Rightarrow (\neg q \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | V | V |
| $V$ | V | F | F | F |
| $V$ | F | V | V | V |
| $V$ | F | F | V | V |
| $F$ | V | V | V | V |
| $F$ | V | F | F | V |
| $F$ | F | V | V | V |
| $F$ | F | F | V | V |

(b)

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \Rightarrow r$ | $\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | V | V |
| $V$ | V | F | F | V |
| $V$ | F | V | V | V |
| $V$ | F | F | V | V |
| $F$ | V | V | V | V |
| $F$ | V | F | F | F |
| $F$ | F | V | V | V |
| $F$ | F | F | V | V |

(c)

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \Rightarrow q$ | $\neg p \Rightarrow r$ | $(p \Rightarrow q) \vee (\neg p \Rightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | V | V | V |
| $V$ | V | F | V | V | V |
| $V$ | F | V | F | V | V |
| $V$ | F | F | F | V | V |
| $F$ | V | V | V | V | V |
| $F$ | V | F | V | F | V |
| $F$ | F | V | V | V | V |
| $F$ | F | F | V | F | V |

(d)

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \Rightarrow q$ | $\neg p \Rightarrow r$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | V | V | V |
| $V$ | V | F | V | V | V |
| $V$ | F | V | F | V | F |
| $V$ | F | F | F | V | F |
| $F$ | V | V | V | V | V |
| $F$ | V | F | V | F | F |
| $F$ | F | V | V | V | V |
| $F$ | F | F | V | F | F |

(e)

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \Leftrightarrow q$ | $\neg q \Leftrightarrow r$ | $(p \Leftrightarrow q) \vee (\neg q \Leftrightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | V | F | V |
| $V$ | V | F | V | V | V |
| $V$ | F | V | F | V | V |
| $V$ | F | F | F | F | F |
| $F$ | V | V | F | F | F |
| $F$ | V | F | F | V | V |
| $F$ | F | V | V | V | V |
| $F$ | F | F | V | F | V |

(f)

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg p \Leftrightarrow \neg q$ | $q \Leftrightarrow r$ | $(\neg p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | V | V | V |
| $V$ | V | F | V | F | F |
| $V$ | F | V | F | F | V |
| $V$ | F | F | F | V | F |
| $F$ | V | V | F | V | F |
| $F$ | V | F | F | F | V |
| $F$ | F | V | V | F | F |
| $F$ | F | F | V | V | V |

Le tabelle in (g) ed (h) si ottengono in modo analogo: poiché dipendono da 4 variabili booleane, hanno 16 righe....

2. Verificare le seguenti equivalenze logiche fra forme proposizionali.
   (a) $p \vee (p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; p, \qquad p \wedge (p \vee q) \;\Leftrightarrow\; p,$ (leggi di assorbimento);
   (b) $\big((p \wedge q) \vee \neg q\big) \;\Leftrightarrow\; \big(p \vee \neg q\big), \qquad \big((p \vee q) \wedge \neg q\big) \;\Leftrightarrow\; \big(p \wedge \neg q\big)$
   (c) $\big(\neg(p \vee q)\big) \;\Leftrightarrow\; \big(p \Leftrightarrow q\big);$
   (d) $\big(\neg(p \Leftrightarrow q)\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\neg p \Leftrightarrow q\big).$
   (e) $\big(p \Rightarrow q\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\neg p \vee q\big).$

*Sol.* Verifichiamo che gli enunciati a sinistra e a destra dell'equivalenza logica $\Leftrightarrow$ hanno la stessa tabella di verità.
(a)

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee (p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | V |
| $V$ | F | F | V |
| $F$ | V | F | F |
| $F$ | F | F | F |

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \wedge (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | V |
| $V$ | F | V | V |
| $F$ | V | V | F |
| $F$ | F | F | F |

Poiché la prima e la quarta colonna di ognuna delle due tabella sono uguali, valgono le equivalenze logiche richieste. Osserviamo che ciò equivale a dire che gli enunciati $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ e $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ sono tautologie, ossia sono veri per ogni valore di $p$ e $q$.
Le equivalenze logiche in (a) esprimono le proprietà di assorbimento delle operazioni $\wedge$ e $\vee$ nell'algebra booleana del Calcolo Proposizionale $(\mathcal{P}, \wedge, \vee, \neg)$.

(b)

| $p$ | $q$ | $p \vee \neg q$ |
|---|---|---|
| $V$ | V | V |
| $V$ | F | V |
| $F$ | V | F |
| $F$ | F | V |

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \vee \neg q$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | V |
| $V$ | F | F | V |
| $F$ | V | F | F |
| $F$ | F | F | V |

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $(p \vee q) \wedge \neg q$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | F |
| $V$ | F | V | V |
| $F$ | V | V | F |
| $F$ | F | F | F |

Conclusione: l'enunciato $p \vee \neg q$ è logicamente equivalente all'enunciato $(p \wedge q) \vee \neg q$ ma non è logicamente equivalente all'enunciato $(p \vee q) \wedge \neg q$.

(c)

| $p$ | $q$ | $\neg(p \vee q)$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | V | F | V |
| $V$ | F | F | F |
| $F$ | V | F | F |
| $F$ | F | V | V |

Conclusione: gli enunciati $\neg(p \vee q)$ e $p \Leftrightarrow q$ non sono logicamente equivalenti.

(d)

| $p$ | $q$ | $\neg(p \Leftrightarrow q)$ | $\neg p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | V | F | F |
| $V$ | F | V | V |
| $F$ | V | V | V |
| $F$ | F | F | F |

Conclusione: gli enunciati $\neg(p \Leftrightarrow q)$ e $\neg p \Leftrightarrow q$ sono logicamente equivalenti.

(e)

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $\neg p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | V |
| $V$ | F | F | F |
| $F$ | V | V | V |
| $F$ | F | V | V |

Conclusione: gli enunciati $p \Rightarrow q$ e $\neg p \vee q$ sono logicamente equivalenti.

3. Determinare quali tra le seguenti forme proposizionali sono tautologie e quali sono contraddizioni.
   (a) $(\neg p \wedge (p \vee q)) \Rightarrow q$; (b) $(\neg p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$; (c) $(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$;
   (d) $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$; (e) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((r \Rightarrow p) \Rightarrow (s \Rightarrow p))$

*Sol.*
(a) L'enunciato $\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$ è una tautologia. Infatti dalla tabella di verità sottostante vediamo che è vero per ogni valore di $p$ e $q$.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\neg p \wedge (p \vee q)$ | $\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | F | V |
| $V$ | F | V | F | V |
| $F$ | V | V | V | V |
| $F$ | F | F | F | V |

(b) L'enunciato $(\neg p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$ è una tautologia:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $\neg p \wedge (p \Rightarrow q)$ | $(\neg p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | F | V |
| $V$ | F | F | F | V |
| $F$ | V | V | V | V |
| $F$ | F | V | V | V |

(c) L'enunciato $(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$ è una tautologia:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $\neg q \wedge (p \Rightarrow q)$ | $(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | F | V |
| $V$ | F | F | F | V |
| $F$ | V | V | F | V |
| $F$ | F | V | V | V |

(d) L'enunciato $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ è una contraddizione, ossia è falso per ogni valore di $p$ e $q$. Ciò può essere verificato mediante la tabella di verità. Oppure, sfruttando le proprietà delle operazioni dell'algebra boolena del Calcolo Proposizionale $(\mathcal{P}, \wedge, \vee, \neg)$, si può verificare che l'enunciato $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ è logicamente equivalente a $p$ mentre l'enunciato $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ è logicamente equivalente a $\neg p$. Poiché $p \wedge \neg p$ è una contraddizione, anche $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ è una contraddizione.

Verifichiamo che l'enunciato $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ è logicamente equivalente a $p$:
$(p \vee q) \bigwedge (p \vee \neg q) \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge p \bigvee p \wedge \neg q \bigvee q \wedge p \bigvee q \wedge \neg q$ (distributività)
$\Leftrightarrow \quad p \bigvee p \wedge \neg q \bigvee q \wedge p \bigvee 0$ (idempotenza, propr. del complemento) (qui 0 indica una contraddizione)
$\Leftrightarrow \quad p$ (assorbimento).
Analogamente si ottiene che $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ è logicamente equivalente a $\neg p$.

(e) L'enunciato $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((r \Rightarrow p) \Rightarrow (s \Rightarrow p))$ è una tautologia.
Ci sono almeno 3 modi per verificarlo:
- mediante la funzione di verità, che risulta vera per ogni valore di $p,\ q,\ r,\ s$;
- sostituendo le implicazioni $a \Rightarrow b$ con $\neg a \vee b$ e poi semplificando l'espressione booleana ottenuta

$$\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee r) \bigvee \neg(\neg r \vee p) \vee (\neg s \vee p);$$

- ragionando cosi':
chiamiamo $\mathcal{A}: \ ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$ e $\mathcal{B}: \ ((r \Rightarrow p) \Rightarrow (s \Rightarrow p))$ e osserviamo che se $\mathcal{B}$ è vero, allora $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ è vero.
Se $p = V$, allora l'enunciato $\mathcal{B}$ è vero per ogni valore di $r$ ed $s$. Ne segue che $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ è vero, per ogni valore di $q,\ r,\ s$.
Se $p = F$, guardiamo $\mathcal{A}$: $p \Rightarrow q$ è vero per ogni $q$, da cui segue che $\mathcal{A}$ è vero se e solo se $r$ è vero.
Se $r$ è falso, $\mathcal{A}$ è falso e $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ è vero;
se $r$ è vero, $\mathcal{A}$ è vero. Allo stesso tempo $r \Rightarrow p$ è falso, $\mathcal{B}$ è vero, e $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ è vero.
Conclusione: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ è una tautologia.

4. Stabilire se le seguenti forme proposizionali $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ e $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ sono equivalenti.

*Sol.* Calcoliamo e confrontiamo le rispettive tabelle di verità:

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \Rightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | V | V |
| $V$ | V | F | V | F |
| $V$ | F | V | F | V |
| $V$ | F | F | F | V |
| $F$ | V | V | V | V |
| $F$ | V | F | V | F |
| $F$ | F | V | V | V |
| $F$ | F | F | V | F |

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \Rightarrow r$ | $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | V | V | V | V |
| $V$ | V | F | F | F |
| $V$ | F | V | V | V |
| $V$ | F | F | V | V |
| $F$ | V | V | V | V |
| $F$ | V | F | F | V |
| $F$ | F | V | V | V |
| $F$ | F | F | V | V |

Poiché le tabelle di verità sono diverse, le due forme proposizionali non sono logicamente equivalenti.

5. Dimostrare che se $p$ e $p \Rightarrow q$ sono tautologie allora $q$ è una tautologia.

*Sol.* Per ipotesi $p$ è sempre vera. Supponiamo per assurdo che $q$ non sia una tautologia. Ogni volta che $q$ è falsa, lo è anche $p \Rightarrow q$ . In particolare $p \Rightarrow q$ non è una tautologia. Contraddizione.

6. Scrivere $\Leftrightarrow$ come combinazione di $\neg$ , $\vee$ e $\wedge$.

*Sol.* Poiché $A \Leftrightarrow B$ è logicamente equivalente a $(A \Rightarrow B) \bigwedge (B \Rightarrow A)$, dall'Esercizio 2(e) segue che $A \Leftrightarrow B$ è logicamente equivalente a

$$(\neg A \vee B) \bigwedge (\neg B \vee A).$$

7. Scrivere forme normali disgiuntive logicamente equivalenti alle seguenti forme proposizionali
   (a) $(p \vee q) \vee (p \to q)$; (b) $\neg(p \vee r) \vee (p \to q)$; (c) $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (q \vee p)$;
   (d) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$; (e) $\neg p \vee (q \to \neg r)$.

*Sol.* Nell'algebra di Boole del calcolo proposizionale $(\mathcal{P}, \wedge, \vee, \neg)$ la forma normale disgiuntiva di un enunciato (o forma proposizionale) è il corrispondente della forma "somma di prodotti" in un'algebra di Boole astratta. Dunque è un "OR di ANDs".

(a) $(p \vee q) \vee (p \to q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \vee (\neg p \vee q)$ (Esercizio 2(e))
$\Leftrightarrow \quad p \vee q \vee \neg p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad p \vee \neg p \vee q \vee q$ (propr. associativa e commutativa)
$\Leftrightarrow \quad 1 \vee q \quad \Leftrightarrow \quad 1$ (propr. di complemento e di idempotenza)
(qui 1 indica una tautologia).

(b) $\neg(p \vee r) \vee (p \to q) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q.$

(c) $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (q \vee p) \quad \Leftrightarrow \quad \big((p \wedge \neg q) \to (q \vee p)\big) \bigwedge \big((q \vee p) \to (p \wedge \neg q)\big)$
$\Leftrightarrow \quad \big(\neg(p \wedge \neg q) \vee (q \vee p)\big) \bigwedge \big(\neg(q \vee p) \vee (p \wedge \neg q)\big)$
$\Leftrightarrow \quad \big(\neg p \vee q \vee q \vee p\big) \bigwedge \big((\neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)\big)$
$\Leftrightarrow \quad 1 \bigwedge \big((\neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)\big)$
$\Leftrightarrow \quad (\neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q).$

(d) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge \neg p \bigvee p \wedge r \bigvee q \wedge \neg p \bigvee q \wedge r$ (propr. distributiva)
$\Leftrightarrow \quad 0 \bigvee p \wedge r \bigvee q \wedge \neg p \bigvee q \wedge r$
$\Leftrightarrow \quad p \wedge r \bigvee q \wedge \neg p \bigvee q \wedge r.$
(qui 0 indica una contraddizione).

(e) $\neg p \vee (q \to \neg r) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \vee (\neg q \vee \neg r) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \vee \neg q \vee \neg r.$

8. La *Freccia di Peirce* (NOR o "negazione congiunta") $p \downarrow q$ è logicamente equivalente a $\neg(p \vee q)$. Verificare che $\{\downarrow\}$ è un sistema completo di connettivi logici:
   (a) mostrare che $\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$
   (b) mostrare che $p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$;
   (c) mostrare che $p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$;
   (d) trovare una forma proposizionale solo in $\downarrow$ logicamente equivalente a $p \wedge \neg q$

*Sol.* La *Freccia di Peirce* (NOR o "negazione congiunta") è definita dalla seguente tabella di verità:

| $A$ | $B$ | $A \downarrow B$ |
|---|---|---|
| $V$ | V | F |
| $V$ | F | F |
| $F$ | V | F |
| $F$ | F | V |

In altre parole, $A \downarrow B$ risulta vera se e solo se sono false sia $A$ che $B$. Dimostrare che $\{\downarrow\}$ è un sistema completo di connettivi logici equivale a dimostrare che ogni forma proposizionale è logicamente equivalente ad una forma proposizionale contenente solo $\{\downarrow\}$. Basta far vedere che gli operatori $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ sono esprimibili in termini di $\{\downarrow\}$. Per $\neg, \wedge, \vee$ lo facciamo direttamente in (a),(b),(c). Per gli operatori $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ basta usare l'Esercizio 2(e) e poi (a),(b),(c).

(a) Calcoliamo e confrontiamo le tabelle di verità di $\neg p$ e di $p \downarrow p$:

| $p$ | $\neg p$ | $p \downarrow p$ |
|---|---|---|
| $V$ | F | F |
| $F$ | V | V |

(b) Calcoliamo e confrontiamo le corrispondenti tabelle di verità:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| $V$ | V | V |
| $V$ | F | F |
| $F$ | V | F |
| $F$ | F | F |

| $p$ | $q$ | $p \downarrow p$ | $q \downarrow q$ | $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | V | F | F | V |
| $V$ | F | F | V | F |
| $F$ | V | V | F | F |
| $F$ | F | V | V | F |

(c) Calcoliamo e confrontiamo le corrispondenti tabelle di verità:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| $V$ | V | V |
| $V$ | F | V |
| $F$ | V | V |
| $F$ | F | F |

| $p$ | $q$ | $p \downarrow q$ | $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | V | F | V |
| $V$ | F | F | V |
| $F$ | V | F | V |
| $F$ | F | V | F |

(d) Dalle equivalenze precedenti per sostituzione otteniamo :

$$p \wedge \neg q \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge (q \downarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \downarrow p) \downarrow \big((q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)\big).$$

9. Il NAND o "negazione alternata" $p \mid q$ è logicamente equivalente a $\neg(p \wedge q)$. Verificare che $\{\ \mid\ \}$ è un sistema completo di connettivi logici:
   (a) mostrare che $\neg p \Leftrightarrow p \mid p$;

(b) mostrare che $p \wedge q \Leftrightarrow (p \mid q)\big|(p \mid q)$;
(c) mostrare che $p \vee q \Leftrightarrow ((p \mid p) \mid (q \mid q))$;
(d) trovare una forma proposizionale solo in $\mid$ logicamente equivalente a $p \wedge \neg q$

*Sol.* Il NAND o "negazione alternata" è definito dalla seguente tabella di verità:

| $A$ | $B$ | $A \mid B$ |
|---|---|---|
| $V$ | V | F |
| $V$ | F | V |
| $F$ | V | V |
| $F$ | F | V |

In altre parole $A|B$ è vera quando almeno una fra $A$ e $B$ è falsa. Dimostrare che $\{\ |\ \}$ è un sistema completo di connettivi logici equivale a dimostrare che ogni forma proposizionale è logicamente equivalente ad una forma proposizionale contenente solo $\{\ |\ \}$. Basta far vedere che gli operatori $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ sono esprimibili in termini di $\{\ |\ \}$. Per $\neg, \wedge, \vee$ lo facciamo direttamente in (a),(b),(c). Per gli operatori $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ basta usare l'Esercizio 2(e) e poi (a),(b),(c).

(a) Calcoliamo e confrontiamo le tabelle di verità di $\neg p$ e di $p|p$:

| $p$ | $\neg p$ | $p\|p$ |
|---|---|---|
| $V$ | F | F |
| $F$ | V | V |

(b) Calcoliamo e confrontiamo le corrispondenti tabelle di verità:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| $V$ | V | V |
| $V$ | F | F |
| $F$ | V | F |
| $F$ | F | F |

| $p$ | $q$ | $p\|q$ | $(p\|q)\big\|(p\|q)$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | V | F | V |
| $V$ | F | V | F |
| $F$ | V | V | F |
| $F$ | F | V | F |

(c) Calcoliamo e confrontiamo le corrispondenti tabelle di verità:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| $V$ | V | V |
| $V$ | F | V |
| $F$ | V | V |
| $F$ | F | F |

| $p\|p$ | $q\|q$ | $(p\|p)\big\|(q\|q)$ |
|---|---|---|
| $F$ | F | V |
| $F$ | V | V |
| $V$ | F | V |
| $V$ | V | F |

(d) Dalle equivalenze precedenti per sostituzione otteniamo :

$$p \wedge \neg q \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge (q|q) \quad \Leftrightarrow \quad (p|(q|q))\big|(p|(q|q)).$$

10. Riscrivere ciascuna delle seguenti proposizioni in modo tale che le negazioni siano poste solo davanti ai predicati (cioè non ci devono essere negazioni davanti a un quantificatore o davanti a un'espressione che comprenda connettivi logici)
(a) $\neg\big(\exists y \exists x P(x,y)\big)$; (b) $\neg\big(\forall x \exists y P(x,y)\big)$; (c) $\neg\exists y(Q(y) \wedge \forall x \neg R(x,y))$;
(d) $\neg\exists y(\exists x R(x,y) \vee \forall x S(x,y))$; (e) $\neg\exists y(\forall x \exists z T(x,y,z) \vee \exists x \forall z U(x,y,z))$;
(f) $\neg(\exists x \exists y \neg P(x,y) \wedge \forall x \forall y Q(x,y))$; (g) $\neg\forall x(\exists y \forall z P(x,y,z) \wedge \exists z \forall y P(x,y,z))$

*Sol.* (a) $\neg\big(\exists y \exists x P(x,y)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \forall y \;\; \neg P(x,y)$.

(b) $\neg\big(\forall x \exists y P(x,y)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \forall y \;\; \neg P(x,y)$.

(c) $\neg \exists y (Q(y) \wedge \forall x \neg R(x,y)) \quad \Leftrightarrow$
$\forall y \;\; \neg\big((Q(y) \bigwedge \forall x \neg R(x,y)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \;\; \neg Q(y) \bigvee \neg\big(\forall x \neg R(x,y)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \;\; (\neg Q(y)) \bigvee (\exists x \; R(x,y))$.

(d) $\neg \exists y (\exists x R(x,y) \vee \forall x S(x,y)) \quad \Leftrightarrow$
$\forall y \;\; \neg\big(\exists x R(x,y) \bigvee \forall x S(x,y)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \;\; (\forall x \; \neg R(x,y)) \bigwedge (\exists x \; \neg S(x,y))$.

(e) $\neg \exists y (\forall x \exists z T(x,y,z) \vee \exists x \forall z U(x,y,z)) \quad \Leftrightarrow$
$\forall y \;\; \neg\big(\forall x \exists z T(x,y,z) \bigvee \exists x \forall z U(x,y,z)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \;\; \neg\big(\forall x \exists z T(x,y,z)\big) \bigwedge \neg\big(\exists x \forall z U(x,y,z)\big) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall y \;\; \big(\exists x \forall z \; \neg T(x,y,z)\big) \bigwedge \big(\forall x \exists z \neg U(x,y,z)\big)$.

(f) $\neg(\exists x \exists y \neg P(x,y) \wedge \forall x \forall y Q(x,y)) \quad \Leftrightarrow$
$\neg(\exists x \exists y \neg P(x,y)) \bigvee \neg(\forall x \forall y Q(x,y)) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \forall y P(x,y)) \bigvee (\exists x \exists y \neg Q(x,y))$.

(g) $\neg \forall x (\exists y \forall z P(x,y,z) \wedge \exists z \forall y P(x,y,z)) \quad \Leftrightarrow$
$\exists x \;\; \neg(\exists y \forall z P(x,y,z)) \bigvee \neg(\exists z \forall y P(x,y,z)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \;\; (\forall y \exists z \neg P(x,y,z)) \bigvee (\forall z \exists y \neg P(x,y,z))$.

11. (a) Sia $S \subset \mathbf{R}$. Usando i quantificatori, esprimere il fatto che $x = sup(S)$;
    (b) Usando i quantificatori, esprimere che $y \neq sup(S)$;
    (c) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e sia $x_0 \in \mathbf{R}$. Usando i quantificatori esprimere il fatto che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste;
    (d) Usando i quantificatori esprimere il fatto che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste;
    (e) Sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Usando i quantificatori esprimere il fatto che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$;
    (f) Usando i quantificatori esprimere il fatto che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;
    (g) Esprimere il fatto che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge;
    (h) Sia $\sigma \in \mathbf{R}$. Usando i quantificatori, esprimere il fatto che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma$;
    (i) Usando i quantificatori esprimere il fatto che $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono vettori linearmente indipendenti.

*Sol.* (a) $(\forall s \in S \;\; s \leq x) \bigwedge (\forall y < x \;\; \exists s \in S : \;\; y < s)$.

(b) $(\exists s \in S : \;\; s > y) \bigvee \big(\exists x : \;\; (\forall s \in S \;\; s \leq x) \wedge (x < y)\big)$.

(c) $\exists \ell : \;\; \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \big(\forall x \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon\big)$.

(d) $\forall \ell \; \exists \epsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x : \big(|x - x_0| < \delta \bigwedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon\big)$.

(e) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \;\; \big(\forall x \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \lambda| < \epsilon\big)$.

(f) $\exists \ell : \;\; \forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 > 0 : \big(\forall N \; N > n_0 \Rightarrow |\sum_{n=1}^{N} a_n - \ell| < \epsilon\big)$.

(g) $\forall \ell : \;\; \exists \epsilon > 0 \; \forall n_0 > 0 \; \exists N : \;\; N > n_0 \bigwedge |\sum_{n=1}^{N} a_n - \ell| > \epsilon$.

(h) $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 > 0 : \forall N \; N > n_0 \Rightarrow |\sum_{n=1}^{N} a_n - \sigma| < \epsilon$.

(i) $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}, \quad a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \;\; \Rightarrow \;\; a_1 = a_2 = a_3 = 0$.