ALGEBRA E LOGICA (Geatti) 4^o appello Roma, 7 settembre 2009, ore 14–16.

Cognome .... **Nome** ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare e sintetiche.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 5 punti.

---

1. *Determinare quale di questi sistemi di congruenze ha soluzioni intere*

$$\begin{cases} x \equiv 3 \bmod 6 \\ x \equiv 2 \bmod 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x \equiv 0 \bmod 3 \\ x \equiv 2 \bmod 5 \end{cases}$$

spiegando la risposta. Determinare tutte le soluzioni intere del sistema compatibile.

Sol. Le congruenze del primo sistema hanno singolarmente soluzioni intere; poiché le soluzioni della prima congruenza sono tutte divisibili per 3, mentre quelle della seconda divise per 3 danno resto 2, il primo sistema non ha soluzioni intere. Si può anche vedere che $mcd(3,6) = 3$ non divide $2 - 3 = -1$. Oppure, tentando di risolvere il sistema per sostituzione, troveremmo un'*incongruenza*...

Le congruenze del secondo sistema hanno singolarmente soluzioni intere: per la prima ciò segue dal fatto che $mcd(2,3) = 1$ divide 0; per la seconda, è evidente. Poiché $mcd(3,5) = 1$ divide 2, il secondo sistema ha soluzioni intere. Per il Teorema cinese del resto, tali soluzioni sono della forma $x = x_0 + 15M$, dove x_0 è una soluzione particolare del sistema ed $M \in \mathbb{Z}$.

Sostituendo la soluzione generale della seconda congruenza $x = 2 + 5k,\ k \in \mathbb{Z}$, nella prima otteniamo $4 + 10k \equiv 0 \mod 3$ e l'equazione diofantea equivalente

$$10k + 3h = -4, \qquad k, h \in \mathbb{Z}. \tag{$*$}$$

Poiché $mcd(10,3) = 1$, esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $10k + 3h = 1$: ad esempio $a = 1$ e $b = -3$. Ne segue che $k = -4$ e $h = 12$ sono una soluzione particolare dell'equazione (*), la cui soluzione genrale risulta quindi $(k,h) = (-4, 12) + (3M, -10M)$, al variare di $M \in \mathbb{N}$. Sostituendo $k = -4 + 3N$ nell'equazione $x = 2 + 5k,\ k \in \mathbb{Z}$, troviamo la soluzione generale del sistema

$$x = 12 + 15M, \qquad M \in \mathbb{Z}.$$

2. *Sia $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione definita per ricorrenza da $F(1) = 3,\ F(n) = n + F(n-1)$, per $n \geq 1$.*
   (a) Calcolare $F(4)$;
   (b) Dimostrare per induzione che $F(n) = \frac{n^2+n+4}{2}$.

Sol. (a) $F(2) = 2 + F(1) = 5, \quad F(3) = 3 + F(2) = 8, \quad F(4) = 4 + F(3) = 12.$

(b) Per $n = 1$, troviamo $F(1) = 3 = \frac{1^2+1+4}{2}$. Dunque la tesi è verificata.
Ipotesi induttiva: Supponiamo che valga $F(n) = \frac{n^2+n+4}{2}$.
Facciamo vedere che $F(n+1) = \frac{(n+1)^2+(n+1)+4}{2}$:
per definizione $F(n+1) = (n+1) + F(n)$. Per Ipotesi induttiva, $F(n) = \frac{n^2+n+4}{2}$. Sommando troviamo

$$F(n+1) = (n+1) + F(n) = (n+1) + \frac{n^2+n+4}{2} = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 4}{2},$$

come richiesto.
Osserviamo che $F(n)$ non è altro che la somma dei primi n numeri naturali più 2...

3. *Determinare il resto della divisione per 11 di 6^{12^7}. Spiegare bene la risposta.*

Sol. Osserviamo che 11 è primo e dunque per il piccolo Teorema di Fermat,

$$6^{10} \equiv 1 \mod 11.$$

L'esponente
$$12^7 \equiv 2^7 \equiv 2^3 \cdot 2^4 \equiv 8 \cdot 16 \equiv 8 \cdot 6 \equiv 8 \mod 10,$$
può essere scritto come
$$12^7 = 10 \cdot m + 8, \quad \text{per un opportuno } m \in \mathbb{Z}.$$
Ne segue che
$$6^{12^7} = 6^{10 \cdot m + 8} \equiv 6^{10 \cdot m} \cdot 6^8 \equiv 6^8 \equiv (6^2)^4 \equiv 3^4 \equiv 81 \equiv 4 \mod 11,$$
cioè il resto della divisione per 11 di 6^{12^7} è 4.

4. *Considerare la seguente relazione sull'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$:*
   $a\,R\,b$ *se esiste* $r \in \mathbb{N}$ *tale che* $a^r = b$.
   (a) Verificare che R è una relazione di ordine parziale su $\mathbb{N}$;
   (b) Sia $a = 4$. Determinare l'insieme dei maggioranti di a e l'insieme dei minoranti di a.

Sol. (a) dobbiamo verificare che la relazione è *riflessiva, antisimmetrica e transitiva*:
• riflessiva aRa: infatti per ogni $a \in \mathbb{N}$ vale $a^1 = a$ (cioè per $r = 1$);
• antisimmetrica $\begin{cases} aRb \\ bRa \end{cases} \Rightarrow a = b$: supponiamo che esistano $r, s \in \mathbb{N}$ tali che $a^r = b$ e $b^s = a$. Allora vale $a^{rs} = a$. Ma questo è possibile se e solo se $r = s = 1$, da cui segue che $a = b$.
• transitiva $\begin{cases} aRb \\ bRc \end{cases} \Rightarrow aRc$: supponiamo che esistano $r, s \in \mathbb{N}$ tali che $a^r = b$ e $b^s = c$. Allora vale $a^{rs} = c$, cioè aRc.
(b) Sia $a = 4$. L'insieme dei maggioranti di a è dato dai numeri naturali $m \in \mathbb{N}$ per cui esiste $r \in \mathbb{N}$ tale che $a^r = m$, ossia dalle potenze di 4:
$$magg(4) = \{m \in \mathbb{N} \mid 4Rm \Leftrightarrow 4^r = m,\ r \in \mathbb{N}\}.$$
L'insieme dei minoranti di 4 è dato dai numeri naturali $m \in \mathbb{N}$ per cui esiste $r \in \mathbb{N}$ tale che $m^r = 4$:
$$min(4) = \{2, 4\}.$$

5. *Siano dati gli enunciati $A \wedge (\neg(B \vee A))$ e $\neg A \vee (\neg(B \vee \neg A))$.*
   (a) Scriverli in forma normale disgiuntiva;
   (b) Determinare se sono logicamente equivalenti.

Sol. (a) $A \wedge (\neg(B \vee A)) \quad \Leftrightarrow \quad A \wedge (\neg B \wedge \neg A) \quad \Leftrightarrow \quad A \wedge \neg A \wedge \neg B$;
$\neg A \vee (\neg(B \vee \neg A)) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \vee (\neg B \wedge A)$.
(b) I due enunciati non sono logicamente equivalenti: il primo è sempre falso, il secondo no. Infatti, se A è vero e B è falso, allora $\neg A \vee (\neg B \wedge A)$ è vero.

6. *Sia $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ una funzione.*
   (a) Usando quantificatori e connettivi logici esprimere il fatto che f è iniettiva e la sua negazione (N.B. non ci devono essere negazioni davanti ai quantificatori);
   (b) Usando quantificatori e connettivi logici esprimere il fatto che f è suriettiva e la sua negazione;
   (c) Determinare se la funzione $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $\quad f(x) = x^4$ è iniettiva e se è suriettiva.

Sol.
(a) $\forall x_1, x_2 \in [0, 1] \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;
$\exists x_1, x_2 \in [0, 1] \quad \neg(x_1 = x_2) \bigwedge f(x_1) = f(x_2)$;
(b) $\forall y \in [0, 1] \exists x \in [0, 1] : \quad f(x) = y$;
$\exists y \in [0, 1] \forall x \in [0, 1] : \quad f(x) \neq y$;
(c) $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $\quad f(x) = x^4$ è iniettiva e suriettiva: disegnare il grafico....