ALGEBRA E LOGICA (Geatti) 3° appello Roma, 2 luglio 2012, ore 14-16.

Cognome .... **Nome** ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare, sintetiche e complete.* NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. *Siano dati gli insiemi* $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x \equiv 1 \bmod 4\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x \equiv 1 \bmod 2\}$.
   (a) Determinare quali delle seguenti relazioni valgono

$$A \subset B, \qquad B \subset A, \qquad A = B.$$

   (b) Determinare tutte le soluzioni del sistema di congruenze $\begin{cases} 3x \equiv 1 \bmod 4 \\ 3x \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}$
   (c) Determinare tutte le soluzioni del sistema della parte (b) contenute nell'intervallo $[-10, 10]$.

Sol. L'insieme A è dato da tutte le soluzioni intere della congruenza $3x \equiv 1 \bmod 4$, cioè

$$A = \{x = 3 + 4k, \text{ al variare di } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Similmente B è dato da tutte le soluzioni intere della congruenza $3x \equiv 1 \bmod 2$, cioè

$$B = \{x = 1 + 2k, \text{ al variare di } k \in \mathbb{Z}\} = \{x = 3 + 2k, \text{ al variare di } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Quindi tutti gli elementi di A si ottengono a partire da 3 con "salti di 4"

$$A = \{\ldots - 13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15 \ldots\}$$

e quelli di B si ottengono a partire da 3 con "salti di 2"

$$B = \{\ldots - 11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}.$$

È chiaro che $A \subset B$ e l'inclusione è propria.
(b) L'insieme delle soluzioni intere del sistema è dato da $A \cap B = A$.
(c) Le soluzioni cercate sono $\{-9, -5, -1, 3, 7\}$.

2. *Sia A un insieme di cardinalità uguale a 3. Determinare la cardinalità di ognuno dei seguenti insiemi*

$$A \cap (A \setminus A), \quad A \cup (A \cap A), \quad A \cup \mathcal{P}(A), \quad \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A), \quad \mathcal{P}(A \times A).$$

Sol. (1) Si ha che $A \setminus A = \emptyset$. Quindi $A \cap (A \setminus A) = \emptyset$ ed ha cardinalità 0.
(2) $A \cup (A \cap A) = A \cup A = A$. Quindi $A \cup (A \cap A)$ ha cardinalità 3.
(3) $\mathcal{P}(A)$ ha cardinalità $2^3 = 8$. Poiché $\mathcal{P}(A) \cap A = \emptyset$, la cardinalità di $A \cup \mathcal{P}(A)$ è uguale a 3+8=11.
(4) Poiché $\mathcal{P}(A)$ ha cardinalità 8, la cardinalità del prodotto cartesiano $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ è $8 \cdot 8 = 64$.
(5) Poiché la cardinalità del prodotto cartesiano $A \times A$ è 9, la cardinalità di $\mathcal{P}(A \times A)$ è $2^9 = 512$.

3. *Calcolare le seguenti classi resto (di ogni classe resto modulo n esibire un rappresentante fra 0 ed $n-1$)*

$$\overline{19^{145}} \bmod 13, \qquad \overline{(-12)^{36} \cdot 50^{19}} \bmod 7, \qquad \overline{2^{-1}} \bmod 17$$

spiegando i vari passaggi.

Sol. (1) Osserviamo che 13 è primo. Allora, per il Piccolo Teorema di Fermat, $\forall a \in \mathbb{Z}$ con $mcd(a, 13) = 1$, vale $a^{12} \equiv 1$ mod 13. Ne segue che

$$\overline{19^{145}} = \overline{6^{145}} = \overline{6^{144}} \cdot \bar{6} = (\overline{6^{12}})^{12} \cdot \bar{6} = \bar{6} \text{ mod } 13.$$

(2) Anche 7 è primo e per il Piccolo Teorema di Fermat, $\forall a \in \mathbb{Z}$ con $mcd(a, 7) = 1$, vale $a^6 \equiv 1$ mod 7. Ne segue che

$$\overline{(-12)^{36} \cdot 50^{19}} = \bar{1} \cdot \bar{1}^{19} = \bar{1} \text{ mod } 7.$$

(3) Poiché $mcd(2, 17) = 1$, la classe $\overline{2^{-1}}$ mod 17 esiste. Per definizione $\overline{2^{-1}}$ mod 17 è la la classe $\bar{x}$ tale che $\bar{2} \cdot \bar{x} = \bar{1}$ mod 17. Dall'equazione $2x - 17y = 1$, ricaviamo $x = 9$ e $y = 1$. Da cui segue che $\overline{2^{-1}} = \bar{9}$ mod 17. Prova: $2 \cdot 9 = 18 \equiv 1$ mod 17.

4. *Determinare se la relazione sull'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ data da*

$$R = \{(1, 2),\ (2, 1), (2, 2), (3, 3),\ (4, 4)\}$$

è o meno riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva.

Sol. R non è riflessiva, perché manca $(1, 1)$ (cioè 1 non è in relazione con se stesso).
R è simmetrica (cioè xRy implica yRx) perché contiene sia $(1, 2)$ che $(2, 1)$ (non ci sono altre coppie con coordinate distinte).
R non è antisimmetrica (xRy & yRx non implicano $x = y$): sia $(1, 2)$ che $(2, 1)$ appartengono ad R, ma $1 \neq 2$.
R non è transitiva (xRy & yRz non implicano xRz): infatti $1R2$ & $2R1$ non implicano $1R1$.

5. *Siano dati gli insiemi X, Y, Z e gli enunciati*

$$A: \quad x \in X, \qquad B: \quad x \notin Y, \qquad C: \quad x \in Z.$$

(a) Combinando A, B, C mediante gli operatori logici $\wedge$, $\vee$, $\neg$, esprimere il fatto che

$$x \in (X \cap Y) \cup (Z \cap Y).$$

(b) A partire da $(A \wedge B) \vee (\neg(\neg C \wedge A))$, determinare se $x \in X \cap Z$.

Sol. (a) $(A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg B)$
(b) Intanto semplifichiamo l'espressione:

$$(A \wedge B) \vee (\neg(\neg C \wedge A)) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (C \vee \neg A) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee C \vee \neg A.$$

Dunque x appartiene ad $X \setminus Y$ oppure a Z oppure a $(Y \cup Z) \setminus X$. In particolare, x può appartenere a $X \cap Z$, ma non appartiene necessariamente a $X \cap Z$.

6.(a) *Determinare la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che soddisfa l'equazione ricorsiva omogenea*

$$\begin{cases} a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 0 \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 2. \end{cases} \tag{$*$}$$

(b) Dovendo determinare la soluzione generale delle equazioni ricorsive non-omogenee

$$a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 5n^2, \qquad a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = n, \qquad a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 3n + 2$$

fra quali funzioni cerchereste una soluzione particolare? (non è richiesto di risolvere le equazioni!!)

Sol. Sia $\lambda^2 + 2\lambda - 3$ il polinomio caratteristico associato all'equazione ricorsiva lineare a coefficienti costanti $a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 0$. Le radici del polinomio sono 1 e -3, reali e distinte, da cui segue che la soluzione generale dell'equazione è data da

$$\xi_n = A \cdot 1^n + B(-3)^n = A + B(-3)^n, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali determiniamo A e B

$$\begin{cases} \xi_0 = A + B(-3)^0 = A + B = 1 \\ \xi_1 = A - 3B = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A = 5/4, \quad B = -1/4.$$

Dunque la soluzione dell'equazione (*) risulta

$$\xi_n = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(-3)^n.$$

(b) $F(n) = 5n^2$ è della forma $s^n \cdot p_2(n)$, dove $s = 1$ e $p_2(n)$ è un polinomio di secondo grado. Poiché $s = 1$ è radice del polinomio caratteristico con molteplicità algebrica $M = 1$, cerchiamo una soluzione particolare della forma $n \cdot (an^2 + bn + c)$;
Ragionamento simile per $F(n) = n = 1^n \cdot n$: cerchiamo una soluzione particolare della forma $n \cdot (an + b)$
Idem per $F(n) = 3n + 2 = 1^n \cdot 3n + 2$: cerchiamo una soluzione particolare della forma $n \cdot (an + b)$.