Laboratorio di Matematica 2017 — 1^o esonero — Roma, 29 gennaio 2018, 10:00–12:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare, sintetiche e complete.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.

1. *Siano A, B, C insiemi qualunque. Determinare se la seguente affermazione è vera o falsa:*

$$\begin{cases} A \cap B \neq \emptyset \\ B \cap C \neq \emptyset \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A \cap C \neq \emptyset.$$

Giustificare la risposta: dimostrare l'affermazione se è vera, esibire un controesempio se è falsa.

Sol.: L'affermazione è falsa, come dimostra questo controesempio:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6\}, \quad C = \{5, 6, 7, 8\}.$$

2. *Siano dati gli insiemi $A = \{x, y, z, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*
   (a) *Sia $f\colon A \to B$ data da $f(x) = 1$, $f(y) = 3$, $f(z) = 5$, $f(u) = 4$. Dire se questa funzione è o meno iniettiva, se è o meno suriettiva. Qual è la sua immagine?*
   (b) *Esibire un elemento per ognuna delle seguenti famiglie di funzioni:*

   $\{f : A \to B \mid f(x) \neq f(y)\}, \quad \{f : A \to B \mid \text{iniettive}\}, \quad \{f : A \to B \mid f(x) = f(y) = 2, f(z) \neq 1\}.$

   (c) *Calcolare il numero di elementi delle famiglie di funzioni del punto (b), spiegando i ragionamenti usati.*

Sol.: (a) f è chiaramemte iniettiva (manda elementi distinti di A in elementi distinti di B), non è suriettiva (l'elemento $2 \in B$ non è immagine di alcun elemento di A tramite f), la sua immagine è $f(A) = \{1, 3, 4, 5\}$ strettamente contenuta in B.

(b)

$$f(x) = 1,\ f(y) = f(z) = f(u) = 5;$$

$$f(x) = 1,\ f(y) = 5,\ f(z) = 4,\ f(u) = 3;$$

$$f(x) = f(y) = f(z) = f(u) = 2.$$

(c.1) per $f(x)$ abbiamo 5 scelte; per $f(y) \neq f(x)$ 4 scelte, per $f(z)$ ed $f(u)$ 5 scelte. Tutte le scelte sono indipendenti, per cui la cardinalità dell'insieme cercato e' $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 = 500$;

(c.2) per $f(x)$ abbiamo 5 scelte; per $f(y) \neq f(x)$ 4 scelte, per $f(z) \neq f(x),\ f(z) \neq f(y)$ 3 scelte e per $f(u)$... 2 scelte. Tutte le scelte sono indipendenti, per cui la cardinalità dell'insieme cercato e' $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$;

(c.3) per $f(x)$ e $f(y)$ abbiamo 1 scelta, per $f(z)$ 4 scelte, per $f(u)$ 5 scelte. La cardinalità dell'insieme cercato e' $4 \cdot 5 = 20$;

3. *Sia data la famiglia di funzioni $f(x) = a\cos x + b\sin x$, al variare di $a, b \in \mathbf{R}$.*
   (a) *Determinare i valori di a e b per cui $f(0) = 1$ ed $f(\pi/2) = -1$.*
   (b) *Calcolare il valore della funzione ottenuta la punto (a) in $x = \pi$.*
   (c) *Determinare tutti gli $x \in [-\pi, \pi]$ in cui tale funzione è non negativa.*

Sol.: (a) $f(0) = 1$ ed $f(\pi/2) = -1$ se e solo se $a = 1$ e $b = -1$, cioè $f(x) = \cos x - \sin x$.
(b) In tal caso $f(\pi) = \cos\pi - \sin\pi = -1$.
(c) $f(x) \geq 0$ se e solo se $\cos x \geq \sin x$. Confrontando i grafici delle due funzioni si ottiene che la disuguaglianza cercata vale per gli $x \in [-3\pi/4, \pi/4]$.

4. (a) *Determinare il polinomio a coefficienti reali di grado più basso che ha $\alpha = 2 + i$ fra le sue radici.*

(b) Decomporre il polinomio $x^4 - 4$ come prodotto di polinomi irriducibili a coefficienti complessi, a coefficienti reali e a coefficienti razionali.

Sol.: (a) Il polinomio a coefficienti reali di grado più basso che ha $\alpha = 2 + i$ fra le sue radici è $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2$. Nel nostro caso $2\mathrm{Re}(\alpha) = 4$ e $|\alpha|^2 = 5$, per cui il polinomio cercatao è

$$x^2 - 4x + 5.$$

(b) In $\mathbf{C}[x]$ abbiamo

$$x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2});$$

In $\mathbf{R}[x]$ abbiamo

$$x^4 - 4 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x^2 + 2),$$

e in $\mathbf{Q}[x]$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 2).$$