*COGNOME* ................................ *NOME* ........................

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare, sintetiche e complete.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.

1. *Data l'affermazione* **A: "il numero naturale $n$ è divisibile per 18"**, *determinare quali delle seguenti condizioni sono necessarie affinché* **A** *sia vera e quali sono sufficienti.*
   *(a) $n$ è divisibile per 3;*
   *(b) $n$ è divisibile per 2;*
   *(c) $n$ è divisibile per 36;*
   *(d) $n$ è divisibile per 6.*

*Sol.*: "Una condizione (C) è *necessaria* affinché **A** sia vera"
significa

$$\mathbf{A} \text{ vera} \quad \Rightarrow \quad \text{(C) vera.}$$

Nel nostro caso, le condizioni (a) (b) e (d) sono *necessarie* affinché **A** sia vera.
Infatti:
$n$ divisibile per 18 $\quad\Rightarrow\quad$ $n$ divisibile per 3.
Se $n$ è un multiplo intero di 18, è necessariamente un multiplo intero di 3: $n = m \cdot 18 = 6m \cdot 3$.

Similmente:
Se $n$ è un multiplo intero di 18, è necessariamente un multiplo intero di 2;
Se $n$ è un multiplo intero di 18, è necessariamente un multiplo intero di 6.

La condizione (c) non è necessaria affinché **A** sia vera:
infatti 18 stesso è divisibile per 18, ma non per 36.

Viceversa, la condizione (c) è sufficiente affinché **A** sia vera.
Se $n$ è divisibile per 36, allora è divisibile per 18: $n = m \cdot 36 = 2m \cdot 18$.

Invece nessuna fra le condizioni (a), (b) e (d) è sufficiente affinché **A** sia vera:
3 è divisibile per 3, ma non per 18;
2 è divisibile per 2, ma non per 18;
6 è divisibile per 6, ma non per 18.

2. *Siano dati gli insiemi $A = \{x, y, z, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.*
   *(a) Sia $f\colon A \to B$ data da $f(x) = 1$, $f(y) = 3$, $f(z) = 3$, $f(u) = 4$. Dire se questa funzione è o meno iniettiva, se è o meno suriettiva. Qual è la sua immagine?*
   *(b) Calcolare il numero di elementi delle seguenti famiglie di funzioni, spiegando i ragionamenti usati:*

$$\{f : A \to B \mid f(x) \neq f(y)\}, \quad \{f : A \to B \mid \textit{iniettive}\}, \quad \{f : A \to B \mid f(x) = f(y) = 2, f(z) \neq 1\}.$$

*Sol.*: (a) La funzione $f$ non è iniettiva perché abbiamo $y \neq z$ per cui vale $f(y) = f(z)$; la funzione $f$ non è suriettiva perché $f(A) = \{1, 3, 4\} \neq B$. In altre parole, per $b = 2$ non esiste alcun elemento $a \in A$ con $f(a) = 2$.

(b) $\#\{f : A \to B \mid f(x) \neq f(y)\} = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$:
ci sono 4 scelte per $f(x)$, 3 scelte per $f(y)$ (che deve essere $\neq f(x)$), 4 scelte per $f(z)$, 4 scelte per $f(u)$. Tutte le scelte sono indipendenti.

$\#\{f : A \to B \mid \text{iniettive}\} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$:
ci sono 4 scelte per $f(x)$, 3 scelte per $f(y)$ (che deve essere $\neq f(x)$), 2 scelte per $f(z)$ (che deve essere $\neq f(x)$ & $\neq f(y)$), 1 scelta per $f(u)$ (che deve essere diverso da $f(x), f(y), f(z)$). Tutte le scelte sono indipendenti.

$\#\{f : A \to B \mid f(x) = f(y) = 2, f(z) \neq 1\} = 4 \cdot 3$:
ci sono 1 scelta per $f(x)$, 1 scelta per $f(y)$, 3 scelte per $f(z)$, 4 scelte per $f(u)$. Tutte le scelte sono indipendenti.

3. *Determinare l'insieme di tutti gli $x \in [-2\pi, 2\pi]$ che soddisfano la disuguaglianza*

$$(x-\pi)^2 x \cos x > 0.$$

*Sol.*: Per ogni $x \neq \pi$ vale $(x-\pi)^2 > 0$. La disuguaglianza $x \cos x > 0$ è verificata sul seguente insieme

$$\{x \in [-2\pi, 2\pi] \mid \begin{cases} x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}\} \bigcup \{x \in [-2\pi, 2\pi] \mid \begin{cases} x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}\}.$$

In particolare la disuguaglianza $(x-\pi)^2 x \cos x > 0$ è verificata sul seguente insieme

$$\{x \in [-2\pi, 2\pi] \mid \begin{cases} x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}\} \bigcup \{x \in [-2\pi, 2\pi] \mid \begin{cases} x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}\} \setminus \{\pi\}.$$

Tale insieme è dato da

$$]0, \pi/2[ \cup ]3\pi/2, 2\pi] \cup ]-\pi/2, 0[ \cup [-2\pi, -3\pi/2[.$$

4. *Siano dati i punti $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (0,0)$, $P_3 = (3,1)$.*
   (a) *Determinare il polinomio di secondo grado $p(x)$ il cui grafico contiene i punti dati. Disegnarne un grafico approssimativo.*
   (b) *Quanti ce ne sono di grado tre ?*

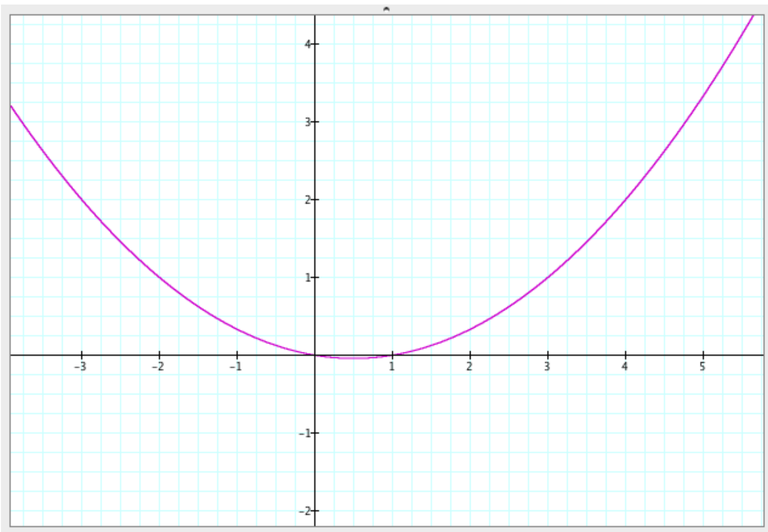
*Sol.*: (a) Sia $p(x) = ax^2 + bx + c$ un generico polinomio di secondo grado. Il grafico di $p$ contiene i punti dati se e solo se

$$p(1) = a + b + c = 0, \quad p(0) = c = 0, \quad p(3) = 9a + 3b + c = 1.$$

Risolvendo si trova che l'*unica soluzione* del sistema lineare nelle incognite $a, b, c$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ c = 0 \\ 9a + 3b + c = 1 \end{cases}$$

è data dal polinomio $p(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x$.




(b) Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un generico polinomio di terzo grado. Il grafico di $p$ contiene i punti dati se e solo se

$$p(1) = a + b + c + d = 0, \quad p(0) = d = 0, \quad p(3) = 27a + 9b + 3c + d = 1.$$

In questo caso il sistema associato nelle incognite $a, b, c, d$

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ d = 0 \\ 27a + 9b + 3c + d = 1 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni. Quindi ci sono infiniti polinomi il cui grafico contiene i punti dati.