Laboratorio di Matematica 2016 — 2° appello — Roma, 15 febbraio 2017, ore 15:00-17:00.

COGNOME .... *NOME* ....

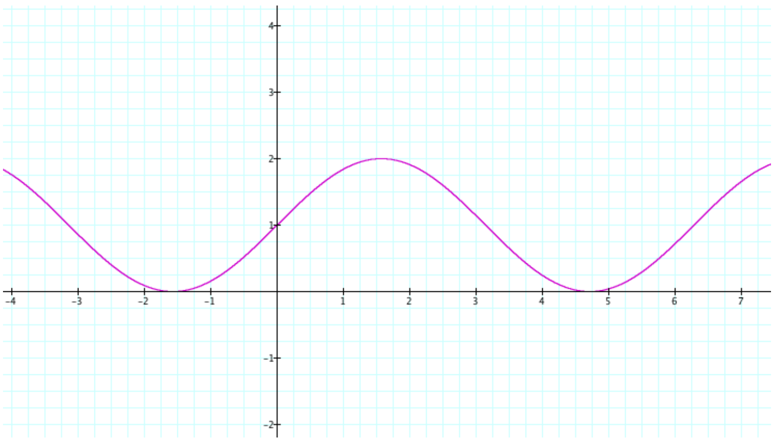
Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare, sintetiche e complete.* NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.

1. *Considerare la funzione* $f\colon [-\pi, 2\pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x + 1$.
   - *(a) Calcolare* $f(0)$ *ed* $f(\pi/2)$*;*
   - *(b) Disegnare il grafico di* f*;*
   - *(c) Determinare* $f([-\pi/2, \pi/4])$*, l'immagine dell'intervallo* $[-\pi/2, \pi/4]$ *tramite* f*;*
   - *(d) Determinare l'insieme* $\{x \in [-\pi, 2\pi] \mid f(x) = 0\}$*;*
   - *(e) Determinare se* f *è iniettiva;*
   - *(f) Determinare un sottoinsieme* $A \subset [-\pi, 2\pi]$ *su cui* f *è iniettiva.*

   Spiegare e illustrare bene le risposte.

Sol.: (a) $f(0) = 1$ e $f(\pi/2) = 2$.

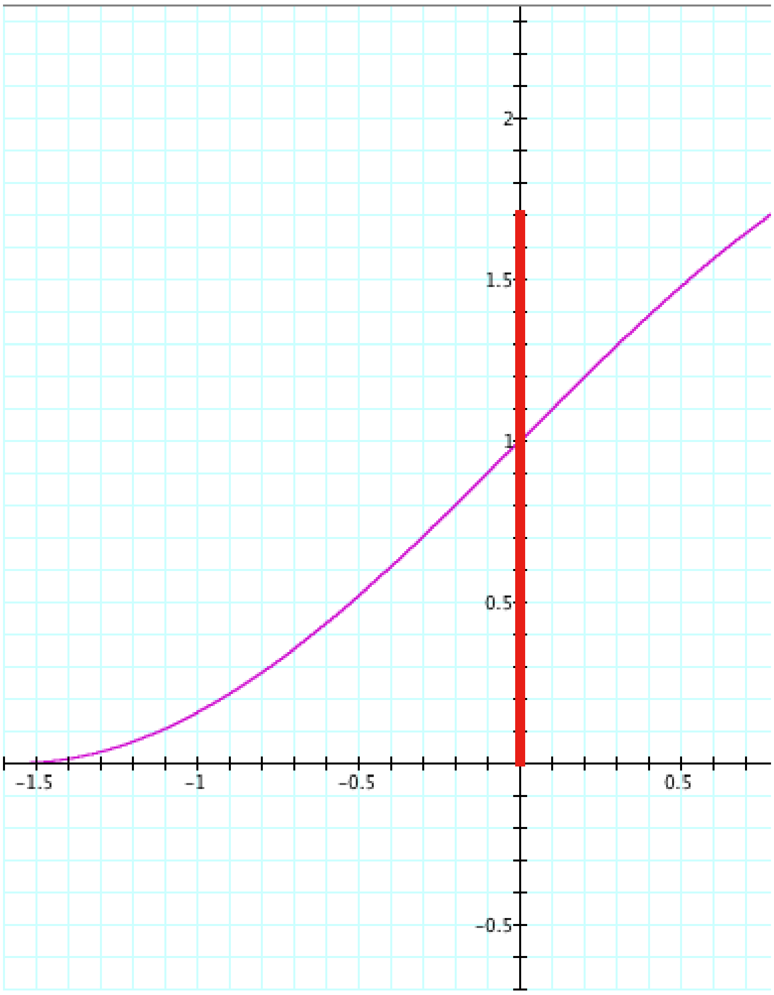
(b)



(c) L'immagine dell'intervallo $[-\pi/2, \pi/4]$ è data da

$$\{f(x),\ x \in [-\pi/2, \pi/4]\}.$$

Guardando la proiezione del grafico di f ristretta a $[-\pi/2, \pi/4]$ sull'asse delle ordinate vediamo che l'immagine dell'intervallo $[-\pi/2, \pi/4]$ è data da $[0, \sqrt{2}/2 + 1] = [0, 1.707]$.



(d) Si ha che $f(x) = 0$ se e solo se $\sin x = -1$, da cui

$$\{x \in [-\pi, 2\pi] \mid f(x) = 0\} = \{-\pi/2, 3\pi/2$$

(e) f non è iniettiva, per quanto detto al punto (d);
(f) Il grafico di f ristretta a $[-\pi/2, \pi/4]$ interseca le rette orizzontali in al pù un punto. In altre parole ogni valore fra 0 e 1.707 è assunto una sola volta. Dunque f ristretta a $[-\pi/2, \pi/4]$ è iniettiva.

2. *Determinare un polinomio p di grado 3 che soddisfa le seguenti condizioni:*

$$p(-2) = 1, \quad p(-1) = 0, \quad p(0) = 0, \quad p(1) = 0.$$

   (a) Disegnare un grafico approssimativo di p.
   (b) È possibile trovare p di grado due con le stesse proprietà?

Sol.: (a) Sappiamo che esiste un unico polinomio di terzo grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che soddisfa le condizioni richieste. In questo caso è facile risolvere direttamente il sistema lineare corrispondente

$$\begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 1 \\ -a + b - c + d = 0 \\ d = 0 \\ a + b + c + d = 0. \end{cases}$$

L'unica soluzione del sistema è data da

$$\begin{pmatrix} -1/6 \\ 0 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che corrisponde al polinomio $p(x) = -1/6x^3 + 1/6x$. Controllare che funziona!!
Il polinomio trovato è il polinomio di Lagrange $L_1(x)$ associato ai nostri dati.

(b) Non ci sono polinomi di grado due, che soddisfano le richieste: il sistema associato

$$\begin{cases} 4b - 2c + d = 1 \\ b - c + d = 0 \\ d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases}$$

risulta incompatibile.

3.

4.