

COGNOME

NOME

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare, sintetiche e complete*.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.

- Siano dati gli insiemi $A = \{a, b, c, d, e, g\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
 - Scrivere una funzione $f: A \rightarrow B$ iniettiva. Quante ce ne sono?
 - Scrivere una funzione $f: A \rightarrow B$ non iniettiva.
 - Esiste una funzione $f: A \rightarrow B$ suriettiva?
 - Calcolare quanti elementi ha l'insieme $\{f: A \rightarrow B \mid f(a) = f(b) = f(c) = 2, f(d) \neq f(g)\}$.

Sol.: Una funzione $f: A \rightarrow B$ è una legge che associa ad OGNI elemento di A uno e un solo elemento di B . Una funzione definita su un insieme finito (come nel nostro caso) è completamente determinata una volta assegnate le immagini di ogni punto. Ad esempio

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 6, \quad f(c) = 6, \quad f(d) = 8, \quad f(e) = 9, \quad f(g) = 2, \quad (1)$$

oppure

$$f(a) = 2, \quad f(b) = 3, \quad f(c) = 4, \quad f(d) = 8, \quad f(e) = 7, \quad f(g) = 7. \quad (2)$$

(a) Una funzione è iniettiva quando elementi distinti hanno immagini distinte. Ad esempio

$$f(a) = 2, \quad f(b) = 3, \quad f(c) = 4, \quad f(d) = 5, \quad f(e) = 6, \quad f(g) = 7,$$

oppure

$$f(a) = 10, \quad f(b) = 8, \quad f(c) = 7, \quad f(d) = 6, \quad f(e) = 5, \quad f(g) = 4.$$

Per contarle si ragiona così:

ci sono 10 scelte per $f(a)$, 9 scelte per $f(b)$, che deve essere diverso da $f(a)$, 8 scelte per $f(c)$, che deve essere diverso da $f(a)$ e da $f(b)$, ..., 5 scelte per $f(g)$. Queste scelte sono tutte indipendenti.

Conclusione: ci sono $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ funzioni iniettive $f: A \rightarrow B$. (b) Nessuna delle due funzioni in (1) e (2) è iniettiva.

(c) Una funzione $f: X \rightarrow Y$ è suriettiva se ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio: $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$. Nel caso di funzioni fra insiemi finiti, si ha che esiste una funzione suriettiva se e solo la cardinalità del codominio è maggiore o uguale di quella del dominio. Nel nostro caso, non esistono funzioni suriettive $f: A \rightarrow B$.

(c) Abbiamo 1 scelta per $f(a) = f(b) = f(c) = 2$, 10 scelte per $f(e)$, 10 scelte per $f(d)$, 9 scelte per $f(g)$. Conclusione: la cardinalità dell'insieme in questione è $10^2 \cdot 9$.

- Sia dato il polinomio $p(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.
 - Decomporre p nel prodotto di polinomi a coefficienti reali di grado più basso possibile.
 - Determinare tutti gli $x \in \mathbf{R}$ che soddisfano la disequazione $p(x) > 0$.

Sol.: (a) Cerchiamo le radici razionali di p fra gli elementi della forma r/s , che soddisfano $r, s \in \mathbf{Z}$, $\text{mcd}(r, s) = 1$, $r|2$ ed $s|1$:

$$\{\pm 2, \pm 1\}.$$

Troviamo che 1 e 2 sono radici di p , che si decompone in $\mathbf{R}[x]$ come

$$p(x) = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 1),$$

dove $x^2 + 1$ non ha radici reali.

(b) Poiché $x^2 + 1 > 0$, per ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha che $p(x) > 0$ se e solo se

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}.$$

Conclusione: $p(x) > 0$ se e solo se $x \in \{x > 2\} \cup \{x < 1\}$.

3. Sia assegnata la seguente corrispondenza tra lettere e numeri:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>z</i>
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

e si scrivano i messaggi in blocchi da 3 cifre.

3.a Cifrare il messaggio "civile" con il cifrario di Cesare di chiave 541.

3.b Cifrare il messaggio "ava" utilizzando il cifrario affine di chiave $(17, 532)$ e fornire l'espressione esplicita della funzione di decifrazione.

4. Completa le seguenti espressioni reattive a numeri in base, illustrando e motivando le risposte:

a) $(418)_{10} = (\dots\dots\dots)_5$

b) $(3251)_7 + (436)_7 = (\dots\dots\dots)_7$

c) Il numero $(54321k)_7$ è divisibile per 7 se e solo se $k = \dots\dots\dots$