Numeri complessi.

I numeri complessi $\mathbf{C}$ sono l'insieme delle combinazioni formali $z = x + iy$, dove x, y sono numeri reali e $i = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria che soddisfa $i^2 = -1$. I numeri x e y sono detti rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di $z = x + iy$ e sono indicati con

$$x = \mathrm{Re} z, \qquad y = \mathrm{Im} z.$$

Vale l'inclusione $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, identificando i numeri reali $\mathbf{R}$ con i numeri complessi di parte immaginaria nulla. I numeri complessi si posono sommare e moltiplicare fra loro, mediante

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d), \qquad (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Si verifica facilmente somma e prodotto così definiti hanno le seguenti proprietà:

s1) $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C} \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (proprietà commutativa della somma)

s2) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C} \quad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (proprietà associativa della somma)

s3) $\exists \mathbf{0} = 0 + i0 \in \mathbf{C} : \quad z + \mathbf{0} = \mathbf{0} + z = z \ \ \forall z \in \mathbf{C}$ (elemento neutro per la somma)

s4) $\forall z = x + iy \in \mathbf{C} \quad z + (-z) = (-z) + z = \mathbf{0}$, ove $-z = -x - iy$ (opposto per la somma)

p1) $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C} \quad z_1 z_2 = z_2 z_1$ (proprietà commutativa del prodotto)

p2) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C} \quad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ (proprietà associativa del prodotto)

p3) $\exists \mathbf{1} = 1 + i0 \in \mathbf{C} : \quad z\mathbf{1} = \mathbf{1}z = z \ \ \forall z \in \mathbf{C}$ (elemento neutro per il prodotto)

p4) $\forall z = x + iy \neq \mathbf{0} \ \exists z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} : \quad z^{-1} z = z z^{-1} = \mathbf{1}$ (inverso per il prodotto)

d) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C} \quad z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (proprietà distributiva di somma e prodotto)

Costruiamo esplicitamente l'inverso di un numero complesso $z = x + iy \neq \mathbf{0}$: sarà un numero complesso $w = a + ib$ tale che

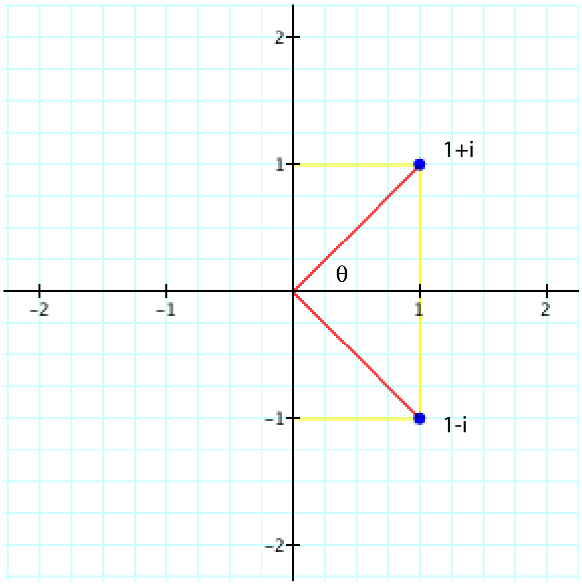
$$zw = (xa - yb) + i(xb + ya) = 1 \quad \text{o, equivalentemente} \begin{cases} xa - yb = 1 \\ xb + ya = 0 \end{cases}. \tag{$*$}$$

Si verifica facilmente che il sistema lineare $(*)$, nelle incognite $a = \mathrm{Re} w$ e $b = \mathrm{Im} w$, ammette soluzione se e solo se x e y non sono entrambi nulli, quando cioè $z \neq \mathbf{0}$. In tal caso la soluzione è anche unica ed è data da $a = \frac{x}{x^2 + y^2}$ e $b = \frac{-y}{x^2 + y^2}$.

Si dice coniugato di $z = x + iy$ il numero complesso $\overline{z} = x - iy$.
L'operazione di *coniugio* ha le seguenti proprietà:

$\overline{\overline{z}} = z$
$\mathrm{Re} z = (z + \overline{z})/2, \quad \mathrm{Im} z = (z - \overline{z})/2i, \quad z^{-1} = \overline{z}/z\overline{z}$
$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
$\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$
$z\overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0$

L'insieme $\mathbf{C}$ si può rappresentare nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, facendo corrispondere a $z = x + iy$ il punto di coordinate $(x, y) = (\mathrm{Re} z, \mathrm{Im} z)$. In questa rappresentazione, il coniugato $\overline{z}$ è il simmetrico di z rispetto all'asse x e il modulo di z, dato da $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, è la distanza di z dall'origine.



Il numero complesso $z = 1 + i$ e il suo coniugato $\overline{z} = 1 - i$.

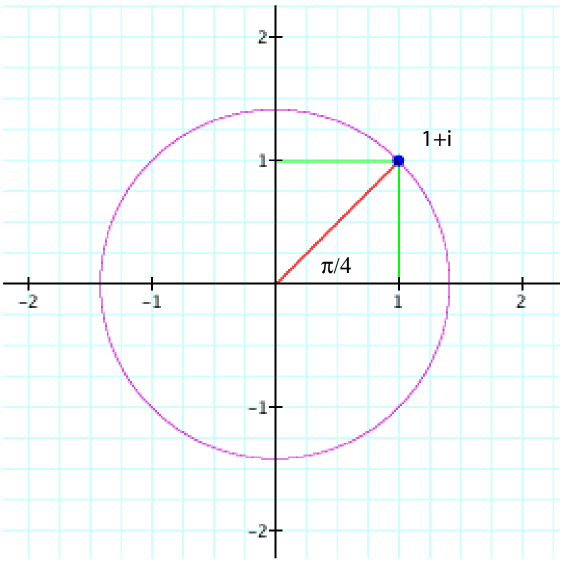
Per il modulo di un numero complesso valgono le seguenti proprietà:

$\mathrm{Re}z \le |z|, \quad \mathrm{Im}z \le |z|$
$|z| = |\overline{z}|$
$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (disuguaglianza triangolare).

Se si indica con θ l'angolo tra l'asse x e il segmento congiungente z con l'origine, si ha $x = |z|\cos\theta$ e $y = |z|\sin\theta$. Si ottiene così la forma trigonometrica del numero complesso z

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

L'angolo θ si chiama l'argomento di z e si indica con $\theta = \arg(z)$. Se $z \ne \mathbf{0}$ esso è determinato solo a meno di multipli interi di 2π (per convenzione si può scegliere $\theta \in [0, 2\pi[$), mentre se $z = \mathbf{0}$ l'argomento è indeterminato.



Il numero complesso $z = 1 + i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$, con modulo $|z| = \sqrt{2}$ e argomento $\theta = \pi/4$.

La forma trigonometrica è particolarmente conveniente per esprimere prodotti di numeri complessi. Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, allora

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

In particolare,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Una ragione per introdurre i numeri complessi è che sono un campo algebricamente chiuso: tutte le radici di un qualunque polinomio a coefficienti complessi appartengono a $\mathbf{C}$.

Teorema Fondamentale dell'Algebra. *Un'equazione polinomiale di grado n a coefficienti complessi*

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0, \qquad a_i \in \mathbf{C},\ i = 1, \ldots n,$$

ha esattamente n radici complesse.

Esempio. *Le radici n-sime di un numero complesso.*
Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, per ogni $a_0 \in \mathbf{C}$ non nullo, l'equazione

$$z^n = a_0 \qquad (**)$$

ha esattamente n radici in $\mathbf{C}$. Se scriviamo $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $a_0 = |a_0|(\cos\phi_0 + i\sin\phi_0)$, l'equazione (**) diventa

$$|z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |a_0|(\cos\phi_0 + i\sin\phi_0)$$

da cui si ricava $|z| = \sqrt[n]{|a_0|}$ ed $n\theta = \phi_0 + 2\pi k$, per $k \in \mathbf{Z}$. Al variare di $k \in \mathbf{Z}$ ci sono in realtà solo n angoli che danno luogo a numeri complessi distinti. Essi sono $\theta_i = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, per $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Le n radici dell'equazione (**) sono dunque

$$z_k = \sqrt[n]{|a_0|}(\cos(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n})), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Esempio. Le radici dell'equazione $z^4 = 4$ sono:
$z_1 = \sqrt{2}$, $z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = i\sqrt{2}$,
$z_3 = \sqrt{2}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt{2}$, $z_4 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -i\sqrt{2}$.

Esempio. Le radici dell'equazione $z^2 + 3iz + 4 = 0$ sono (usando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado)

$$z_{1,2} = \frac{-3i + \sqrt{-25}}{2} = \frac{-3i \pm 5i}{2} = -4i,\ i.$$

Esempio. Le radici dell'equazione $z^2+2z+i = 0$ sono (usando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado) $z_1 = -1 + w_1$ e $z_2 = -1 + w_2$, dove

$$w_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{-\pi}{8} + i\sin\frac{-\pi}{8}), \quad w_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8})$$

sono le due radici dell'equazione $w^2 = 1 - i$.

Dal Teorema Fondamentale dell'Algebra segue che un polinomio a coefficienti complessi è completamente riducibile su $\mathbf{C}$:

Corollario 1. *Un polinomio di grado n a coefficienti complessi $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ si decompone in modo unico (a meno dell'ordine dei fattori) nel prodotto di n polinomi di grado 1 a coefficienti complessi*

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\ldots(z - \alpha_n),$$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono le radici di p.

Consideriamo adesso un polinomio di grado n a coefficienti reali

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad a_i \in \mathbf{R}.$$

In questo caso particolare, vale il seguente fatto:

• *Se α è una radice di p, allora anche $\overline{\alpha}$ lo è.*

Infatti, se $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$, coniugando si trova

$$\overline{\alpha}^n + \overline{a}_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + \overline{a}_1\overline{\alpha} + \overline{a}_0 = \overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = 0.$$

Dunque anche $\overline{\alpha}$ è radice di p.

Da questo fatto segue per esempio che un polinomio a coefficienti reali di grado dispari ha almeno una radice reale.

Corollario 2. *Un polinomio a coefficienti reali di grado n si decompone in modo unico (a meno dell'ordine dei fattori) nel prodotto di polinomi di grado 1 e di grado 2 a coefficienti reali.*

Dimostrazione. Per il teorema fondamentale dell'algebra, p ha n radici in $\mathbf{C}$: un certo numero di esse saranno a due a due complesse coniugate $\beta_1, \overline{\beta}_1, \ldots \beta_k, \overline{\beta}_k \in$, altre saranno possibilmente reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$. A partire dalla decomposizione del polinomio su $\mathbf{C}$, troviamo

$$\begin{aligned}(z - \beta_1)(z - \overline{\beta}_1)\ldots(z - \beta_k)(z - \overline{\beta}_k)(z - \lambda_1)\ldots(z - \lambda_h) = \\ = (z^2 - 2\mathrm{Re}\beta_1 z + |\beta_1|^2)\ldots(z^2 - 2\mathrm{Re}\beta_k z + |\beta_k|^2)(z - \lambda_1)\ldots(z - \lambda_h),\end{aligned}$$

che è proprio la decomposizione cercata.

Esercizi.

1. Siano $z = 2 + 2i$ e $w = 2i$.
   (i) Calcolare $(z - w)^2$, $2z^2 + 1/w$, $z^{-1} + \overline{w}$, $|z + 3w|^2$. Dare la risposta nella forma $a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$.
   (ii) Calcolare la parte reale "Re" e la parte immaginaria "Im" di zw, z^{-1} e $\overline{w}^2$.
   (iii) Calcolare $\mathrm{Arg}(z)$, $\mathrm{Arg}(zw)$ ed $\mathrm{Arg}(z^2)$.
2. Sia
   $$z = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$
   (i) Calcolare $\mathrm{Arg}(z)$, $|z|$, z^2 e z^3.
   (ii) Calcolare $z^2 - z + 1$.
3. Determinare i numeri complessi (fare un disegno) tali che
   (i) $z = -\overline{z}$,
   (ii) $\mathrm{Arg}(z) = 0$,
   (iii) $|z| = 2$,
   (iv) $|z| = \overline{z}$.
4. Dimostrare che per ogni $\varphi \in \mathbf{R}$:
   $$\begin{aligned}\cos(5\varphi) &= \cos^5(\varphi) - 10\cos^3(\varphi)\mathrm{sen}^2(\varphi) + 5\cos(\varphi)\mathrm{sen}^4(\varphi),\\ \mathrm{sen}(5\varphi) &= 5\cos^4(\varphi)\mathrm{sen}(\varphi) - 10\cos^2(\varphi)\mathrm{sen}^3(\varphi) + \mathrm{sen}^5(\varphi).\end{aligned}$$
5. Sia $z \in \mathbf{C}$.
   (i) Far vedere che $\mathrm{Re}(z) = (z + \overline{z})/2$ e $\mathrm{Im}(z) = (z - \overline{z})/2i$.
   Supponiamo adesso che $z \neq 0$.
   (ii) Calcolare $|z/\overline{z}|$.
   (iii) Sia $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$. Chi è l'argomento di $1/z$? E di $z/\overline{z}$?