Matematica Discreta 2014 Informatica (Geatti) 3º appello Roma 3 luglio 2015, 10:00–12:30.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare, sintetiche e complete.* NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 4,5 punti.

1. *Determinare tutte le soluzioni intere del sistema di congruenze* $\begin{cases} 2x \equiv -1 \bmod 5 \\ 3x \equiv 1 \bmod 10. \end{cases}$

Sol.: Le soluzioni della prima congruenza sono gli interi $x = 2 + 5M$, al variare di $M \in \mathbf{Z}$. Sostituendo tali soluzioni nella seconda congruenza, troviamo

$$3(2 + 5M) \equiv 1 \bmod 10 \quad \Leftrightarrow \quad 15M - 10N = -5 \quad \Leftrightarrow \quad 3M - 2N = -1, \quad mcd(3, -2) = 1.$$

Le soluzioni di quest'ultima equazione diofantea sono le coppie di interi

$$(M, N) = (-1, -1) + k(2, 3) = (-1 + 2k, -1 + 3k), \quad \text{al variare di } k \in \mathbf{Z}.$$

Questo significa che gli interi $x = 2+5M$, con $M \in \mathbf{Z}$, sono soluzioni del sistema se e solo se M è della forma $M = -1 + 2k$, al variare di $k \in \mathbf{Z}$.
Conclusione: le soluzioni del sistema sono gli interi $x = 2 + 5(-1 + 2k) = -3 + 10k$, al variare di $k \in \mathbf{Z}$.

2. *Sia* $A = \{a = a_1a_2a_3a_4 \mid a_i \in \{0, 1\}\}$ *l'insieme delle stringhe ordinate di zeri e uni di lunghezza 4. Sia* $R \subset A \times A$ *la relazione di equivalenza così definita:* aRb *se* $a_1 = b_1$ *oppure* $a_2 = b_2$*. Determinare se* R *è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva.*

Sol.: La relazione R

è riflessiva: infatti $a_i = a_i$, per $i = 1, 2$, cioè aRa;

è simmetrica: infatti $a_i = b_i$, per $i = 1$ o $i = 2$, implica $b_i = a_i$, per $i = 1$ o $i = 2$, cioè aRb implica bRa;

non è antisimmetrica: infatti $a_i = b_i$, per $i = 1$ o $i = 2$, & $b_i = a_i$, per $i = 1$ o $i = 2$, non implica $a = b$. Ad esempio per $a = 1101$ e $b = 1110$ vale aRb & bRa, ma $a \neq b$;

non è transitiva: infatti aRb & bRc non implica aRc. Ad esempio, per $a = 1001$, $b = 1110$ e $c = 0111$ valgono aRb & bRc, ma non vale aRc.

3. *Nove studenti decidono di formare dei gruppi di studio composti da tre studenti ciascuno. In quanti modi lo possono fare? (spiegare per esteso il ragionamento usato per ottenere la risposta).*

Sol.: Il primo gruppo di studio si può formare in $\binom{9}{3}$ modi (tanti quanto sono i sottoinsiemi di 3 elementi di un insieme di 9 elementi). Il secondo gruppo di studio si può formare in $\binom{6}{3}$ modi (tanti quanti sono i sottoinsiemi di 3 studenti dell'insieme dei rimanenti 6 studenti). Il terzo gruppo di studio sarà necessariamente formato dai rimanenti tre studenti.
A questo punto osserviamo che due terne di gruppi di studio sono equivalenti se i rispettivi gruppi di studio contengono gli stessi studenti (cioè non conta l'ordine in cui si sono formati).
Conclusione: i tre gruppi di studio si possono fare in $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \frac{1}{3!} = 280$ modi diversi.

4. *(a) Determinare la funzione ricorsiva* F_n *che soddisfa l'equazione* $F_n + 4F_{n-2} = 0$, $n \geq 2$, *con condizioni iniziali* $F_0 = 1$ *e* $F_1 = 0$ *(la funzione deve essere portata nella forma* $Re(F_n) + iIm(F_n)$*).*
(b) Calcolare F_5*.*

Sol.: (a) Osserviamo innanzitutto che, poiché le condizioni iniziali dell'equazione sono reali, la soluzione cercata sarà reale. Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea $F_n + 4F_{n-2} = 0$ è $\lambda^2 + 4$, con radici complesse coniugate $2i = 2(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2)$ e $-2i = 2(\cos \pi/2 - i \sin \pi/2)$. La soluzione generale (reale) dell'equazione è

$$S_n = P2^n \cos n\pi/2 + Q2^n \sin n\pi/2, \qquad P, Q \in \mathbf{R}.$$

Dalle condizioni iniziali,

$$S_0 = P = 1, \quad S_1 = 2P\cos\pi/2 + 2Q\sin\pi/2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = 1,\ Q = 0,$$

troviamo che la soluzione cercata è

$$\xi_n = 2^n \cos n\pi/2, \quad n \geq 0.$$

(b) $\xi_5 = 2^5 \cos 5\pi/2 = 0$.

5. *Calcolare* 6^{222} mod 23 *(citare i risultati usati nei vari passaggi).*

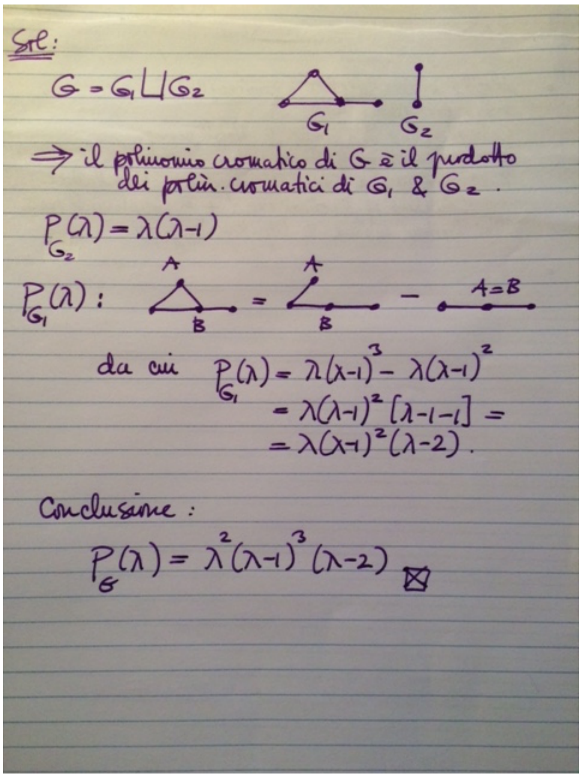
Sol.: Abbiamo che 23 è primo. Dunque, per il Piccolo Teorema di Fermat, vale

$$x^{22} \equiv 1 \text{ mod } 23, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{Z} \text{ che soddisfa } mcd(x, 23) = 1.$$

Poiché $mcd(6, 23) = 1$,

$$6^{222} = 6^{22\cdot 10+2} = (6^{22})^{10} \cdot 6^2 \equiv 1 \cdot 36 \equiv 13 \text{ mod } 23.$$

6. *Calcolare il polinomio cromatico del grafo G.*



Sol:

$G = G_1 \sqcup G_2$

G_1 G_2

$\Rightarrow$ il polinomio cromatico di G è il prodotto dei polin. cromatici di G_1 & G_2.

$P_{G_2}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$

$P_{G_1}(\lambda)$: A B = A B − A=B

da cui $P_{G_1}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^3 - \lambda(\lambda-1)^2$
$= \lambda(\lambda-1)^2[\lambda-1-1] =$
$= \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)$.

Conclusione:

$P_G(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda-2)$ ⊠

7. *Determinare se gli enunciati* $\forall x \exists y : x \leq y$ *e* $\exists x \forall y : x \leq y$ *definiti su* $\mathbf{Z}$ *sono veri o meno.*

Sol.: Il primo enunciato dice che: dato un intero arbitrario x, esiste un intero y tale che è maggiore o uguale di x. Questo è chiaramente vero: basta prendere $y = x + 1$.

Il secondo enunciato dice che: esiste un intero x che è minore o uguale di tutti gli interi y. Questo è chiaramente falso: ad esempio, x non è minore o uguale dell'intero $y = x - 1$.