1. Sia p un numero primo.
   (a) Dimostrare che la cardinalità di $\mathbf{Z}_p^*$ è uguale a $p-1$.
   (b) Sia $k > 1$ un intero. Dimostrare che la cardinalità di $\mathbf{Z}_{p^k}^*$ è uguale a $p^k - p^{k-1}$.
   (c) Verificare questo fatto per $p = 3$ e $k = 2$ e per $p = 3$ e $k = 3$.

2. Verificare che $\bar{x} = \overline{97}$ e $\bar{y} = \overline{373}$ ammettono inverso moltiplicativo in $\mathbf{Z}_{2010}$ e sono uno inverso dell'altro.

3. Determinare se $\bar{x} = \overline{111}$ ammette inverso moltiplicativo in $\mathbf{Z}_{1010}$. Se sì, determinarlo. Determinare quante classi hanno inverso moltiplicativo. Determinare tutte le classi $\bar{x} \in \mathbf{Z}_{1010}$ che non ammettono inverso moltiplicativo.

4. Sia $n = 1001$.
   (a) Verificare che $\bar{x} = \overline{171}$ ammette inverso moltiplicativo in $\mathbf{Z}_{1001}$.
   (b) Determinare $\bar{x}^{-1}$ fra le seguenti possibilità: $\bar{2}$, $\bar{9}$, $\overline{150}$, $\overline{761}$, $\overline{999}$.

5. Sia $n = 1001$.
   (a) Verificare che $\bar{x} = \overline{101}$ appartiene a Z_{1001}^* e determinare $\bar{x}^{-1}$.
   (b) Determinare la cardinalità di Z_{1001}^*.

6. Sia data la relazione $-173 \cdot 371 + 113 \cdot 568 = 1$.
   (a) Verificare che $\bar{x} = 113$ appartiene a $\mathbf{Z}_{371}^*$ e determinare il suo inverso $\bar{x}^{-1}$ (giustificare bene le risposte).
   (b) Verificare che $\bar{x} = 371$ appartiene a $\mathbf{Z}_{568}^*$ e determinare il suo inverso $\bar{x}^{-1}$ (giustificare bene le risposte).

7. Sia $n = 16$. Fare la lista delle classi resto di $\mathbf{Z}_{16}^*$ e per ognuna di esse indicare l'inverso moltiplicativo.

8. Siano $n = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 101$ ed $m = 2^4 \cdot 17 \cdot 37$. Determinare la cardinalità di $\mathbf{Z}_n^*$ e di $\mathbf{Z}_m^*$.

9. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo.
   (a) Verificare che l'elemento neutro e di G è unico.
   (b) Verificare che per ogni $x \in G$, l'inverso x^{-1} di x in G è unico.

10. (*prodotto diretto di gruppi*) Siano $(G_1, e_1, \circ)$ e $(G_2, e_2, *)$ due gruppi.
    (a) Verificare che il prodotto cartesiano $G_1 \times G_2$, col prodotto definito da $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) := (x_1 \circ x_2, y_1 * y_2)$, è un gruppo.
    (b) Determinare l'elemento neutro di $G_1 \times G_2$ rispetto al prodotto così definito.
    (c) Determinare l'inverso di $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$ rispetto al prodotto così definito.
    (d) Verificare che se G_1 e G_2 sono abeliani, anche $G_1 \times G_2$ è abeliano.
    (e) Siano $(G_1, e_1, \circ) = (\mathbf{Z}_2, \bar{0}, +)$ e $(G_2, e_2,) = (\mathbf{Z}_3, \bar{0}, +)$. Scrivere la tabella moltiplicativa del gruppo $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3, +)$.

11. Considerare i seguenti gruppi: per ognuno di essi scrivere la tabella moltiplicativa ed per ogni elemento individuare il suo inverso.
    (a) $A = \{1, -1, i, -i\}$ con l'operazione data dalla moltiplicazione fra numeri complessi.
    (b) $\mathbf{Z}_7$ con la somma fra classi resto.
    (c) $\mathbf{Z}_3^* \times \mathbf{Z}_4^*$ col prodotto definito da $(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (\bar{u}, \bar{v}) = (\overline{x \cdot u}, \overline{y \cdot v})$.
    (d) $\mathbf{Z}_{11}^*$ col prodotto fra classi resto.

(e) $\mathbf{Z}_{12}^*$ col prodotto fra classi resto.

12. Sia $p \in \mathbf{N}$ un numero primo. Verificare che in $\mathbf{Z}_p$ vale l'uguaglianza $(\bar{x}+\bar{y})^p = \bar{x}^p + \bar{y}^p$, per ogni $\bar{x},\ \bar{y} \in \mathbf{Z}_p$ (suggerimento: usare la formula di Newton).
    Verificare che per $n = 4$, tale uguaglianza non vale.
13. Dimostrare che $\sum_{\bar{x}\in\mathbf{Z}_n} \bar{x} = \bar{0}$ in $\mathbf{Z}_n$, per ogni n dispari.
14. Calcolare $(p-1)!$ in $\mathbf{Z}_p$, per p primo.