1. Sia $X = \{a, b, c, d\}$ un insieme di 4 elementi. In $\mathcal{P}(X)$ consideriamo la seguente relazione di equivalenza ARB se $|A| = |B|$ (cioè se A e B hanno la stessa cardinalità).
   (a) Determinare le classi di equivalenza, elencandone gli elementi.
   (b) Verificare che le classi di equivalenza determinano una partizione di $\mathcal{P}(X)$.

2. Consideriamo la seguente relazione di equivalenza su $\mathbf{Z}$:

$$m, n \in \mathbf{Z}, \quad mRn \quad \text{se} \quad m - n = 4k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

   (a) Determinare le classi di equivalenza, elencandone gli elementi.
   (b) Verificare che le classi di equivalenza d eterminano una partizione di $\mathbf{Z}$.

3. Sia $A = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_1x_2 \neq 0\}$. Dati $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ in A, diciamo che $X\,R\,Y$ se $x_1y_1 > 0$ e $x_2y_2 > 0$.
   (a) Verificare che R è una relazione di equivalenza.
   (b) Descrivere le classi di equivalenza di A e determinare quante sono. Esibire un elemento di ogni classe.
   (c) Rispondere alle domande (a) e (b), quando R è la relazione data da: $X\,R\,Y$ se $x_1y_1 > 0$ e $x_2 = y_2$.

4. Sull'insieme $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 23, 33, 35, 42, 45\}$ si consideri la relazione data da "a R b se a e b hanno la somma delle cifre uguale".
   (a) Verificare che R è una relazione di equivalenza.
   (b) Determinare le classi di equivalenza (elencandone gli elementi).

5. Sia $A = \{n \in \mathbf{N} \mid 1 \leq n \leq 5\} \times \{n \in \mathbf{N} \mid 1 \leq n \leq 5\}$ e sia $R = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A : ad = bc\}$.
   (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Determinare le classi di equivalenza di R, elencandone gli elementi. Verificare che formano una partizione di A.
   (c) Sia $\tilde{A}$ = l'insieme delle classi di equivalenza di R. Dimostrare che la mappa $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{Q}_{>0}$ che associa la frazione a/b alla classe di (a, b), è ben definita (cioè tutti gli elementi della stessa classe di equivalenza hanno la stessa immagine). Determinare l'immagine $f(A)$.

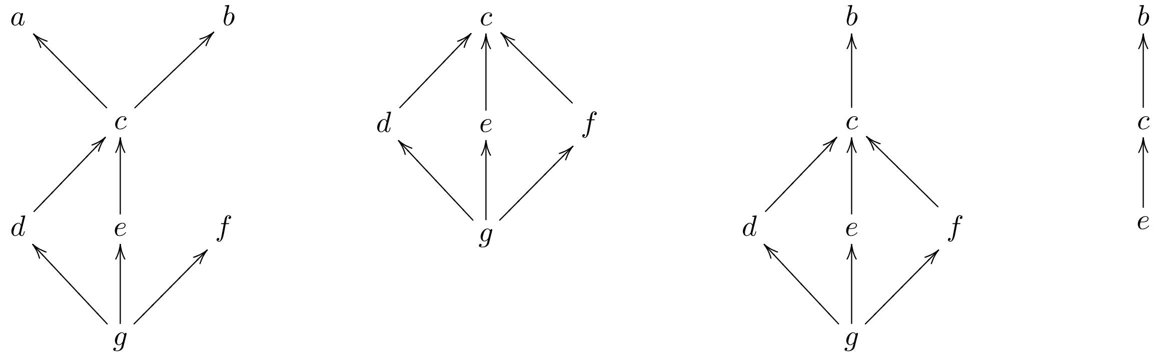
6. Sia $X = \{(1, 2, 0), (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 3, 0), (2, 1, 1), (4, 1, 1), (3, 3, 3)\}$ con la relazione data da $(x, y, z)R(r, s, t)$ se $x + y + z = r + s + t)$.
   (a) Verificare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Determinare le classi di equivalenza enumerandone gli elementi.
   (c) Verificare che determinano una partizione di X.

7. Sull'insieme $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ definiamo la seguente relazione: mRn se $m|n$, cioè se m *divide* n (per definizione, m divide n se esiste $k \in \mathbf{Z}$ per cui vale $n = km$). Verificare che R è una relazione di ordine su $\mathbf{N}$. Determinare se la relazione R è una relazione di ordine totale su $\mathbf{N}$.

8. Sia $D_{25} = \{1, 5, 25\}$ l'insieme dei divisori di 25 con la relazione di ordine data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Elencare tutti gli elementi di R in $D_{25} \times D_{25}$. Disegnare il diagramma di Hasse di R. Determinare se la relazione R è una relazione di ordine totale su D_{25}.

9. Sia $X = \mathcal{P}(\{a, b\})$ l'insieme della parti di $\{a, b\}$ con la relazione di ordine data dalla contenenza: ARB se $A \subset B$. Elencare tutti gli elementi di R in $X \times X$. Disegnare il diagramma di Hasse di R. Determinare se la relazione R è una relazione di ordine totale su $X = \mathcal{P}(\{a, b\})$.

10. Siano dati i seguenti diagrammi



e supponiamo che siano i diagrammi di Hasse di altrettante relazioni di ordine $R_1, \ldots, R_4$ definite rispettivamente sugli insiemi $X_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $X_2 = \{c, d, e, f, g\}$, $X_3 = \{b, c, d, e, f, g\}$, $X_4 = \{b, c, e\}$.

(a) Determinare tutti gli elementi di R_2 in $X_2 \times X_2$ e di R_4 in $X_4 \times X_4$.

(b) Determinare $\{x \in X_1 \mid xR_1c\}$ e $\{x \in X_3 \mid xR_3c\}$.

(c) Per ognuno degli insiemi ordinati (X_i, R_i), per $i = 1, \ldots, 4$, determinare gli elementi massimali, gli elementi minimali ed eventuali massimi e minimi. Giustificare bene le risposte in base alle definizioni corrispondenti.

11. Sia $X = \{(1,2,0), (0,0,0), (0,1,0), (0,1,1), (0,3,0), (2,1,1), (4,1,1), (3,3,3)\}$ con l'ordinamento lessicografico. Disegnare il diagramma di Hasse associato.

12. Sia D_{30} l'insieme dei divisori di 30 con la relazione di ordine parziale data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Disegnare il diagramma di Hasse di D_{30}.

13. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con la relazione di ordine data da: aRb se $a \leq b$. Disegnare il diagramma di Hasse di A. Dire se R definisce un ordinamento totale su A.

14. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con la relazione di ordine data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Disegnare il diagramma di Hasse di A. Dire se R definisce un ordinamento totale su A.

15. Sia D_{36} l'insieme dei divisori di 36 con la relazione di ordine data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Sia $S = \{4, 6\} \subset D_{36}$. Con quali elementi di D_{36} è in relazione 6?