

1. Sia  $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  l'insieme dei numeri naturali. Siano dati gli insiemi

$$A = \{abcdef \in \mathbf{N}^6 \mid 0 \leq a, b, c, d, e, f \leq 5\}, \quad B = \{abcdef \in \mathbf{N}^6 \mid 0 \leq a, b, c \leq 5, 5 \leq d, e, f \leq 9\}$$

$$C = \{abcdef \in \mathbf{N}^6 \mid 0 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9\}, \quad D = \{abcdef \in \mathbf{N}^6 \mid 3 \leq a, b, c, d, e, f \leq 9\}.$$

Determinare la cardinalità di  $A, B, C, D$  e quella dei seguenti insiemi, spiegando il metodo usato:

$$A, B, C, D, A \cup D, A \cap D, B \cup D, C - A, \mathcal{C}_C D, A \times B.$$

2. Calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi, spiegando il metodo usato:
- Stringhe di zeri e uni di lunghezza 8.
  - Stringhe di zeri e uni di lunghezza minore o uguale a 8.
  - Stringhe di zeri e uni di lunghezza 8 che iniziano con 3 zeri e terminano con un uno.
  - Stringhe di zeri e uni di lunghezza 8 che iniziano con 3 zeri o terminano con due uni.
  - Stringhe di cifre da zero a nove di lunghezza 3 che non contengono 3 volte la stessa cifra.
  - Stringhe di cifre da zero a nove di lunghezza 3 che iniziano con un numero pari.
  - Stringhe di cifre da zero a nove di lunghezza 3 che contengono 2 volte la cifra 4.
3. Una scatola contiene 10 palle rosse e 10 palle blu.
- Quante palle dobbiamo estrarre (a caso) per essere sicuri di ottenere almeno tre palle dello stesso colore?
  - Quante palle dobbiamo estrarre (a caso) per essere sicuri di ottenere almeno tre palle blu?
4. Sia  $d$  un intero positivo.
- Far vedere che in ogni insieme di  $d + 1$  numeri naturali non necessariamente consecutivi almeno due danno lo stesso resto se divisi per  $d$ .
  - Far vedere che in ogni insieme di  $d + 1$  numeri naturali consecutivi esattamente uno è divisibile per  $d$ .
5. Sia  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un insieme di  $n$  elementi. Sia  $\mathcal{P}(A)$  l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $A$

$$\mathcal{P}(A) = \{\{\emptyset\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_1, a_2\}, \dots, \{a_1, a_2, a_3\}, \dots, A\}.$$

Verificare che  $\mathcal{P}(A)$  ha cardinalità  $2^n$ .

6. Determinare il coefficiente di  $x^5y^{11}$  e quello di  $x^8y^8$  nello sviluppo di  $(x + y)^{16}$ .
7. Quante stringhe di 7 caratteri si possono formare con le lettere della parola SEERESS?
8. Calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi, spiegando bene il ragionamento fatto:
- Stringhe di zeri e uni di lunghezza minore o uguale a 6.
  - Stringhe di zeri e uni di lunghezza 7 che iniziano con tre zeri e terminano con due uni.
  - Stringhe di cifre da zero a nove di lunghezza 3 che non contengono 2 volte la stessa cifra.
  - Stringhe di cifre da zero a nove di lunghezza 3 che iniziano con un numero  $0 \leq a \leq 5$ .
9. Calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi, spiegando bene il ragionamento fatto:
- Stringhe di zeri e uni di lunghezza minore o uguale a 7.
  - Stringhe di zeri e uni di lunghezza 7 che iniziano con tre uni e terminano con due zeri.
  - Stringhe di cifre da zero a nove di lunghezza 4 che non contengono 2 volte la stessa cifra.
  - Stringhe di cifre da zero a sette di lunghezza 3 che iniziano con un numero  $0 \leq a \leq 3$ .
10. Quante carte dobbiamo estrarre da un mazzo di 52 carte affinché almeno 3 abbiano lo stesso seme? Quante carte dobbiamo estrarre affinché almeno 3 siano di cuori?