

Alcuni di questi esercizi sono stati fatti in classe: rifarli a libro chiuso.

1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X . Indichiamo con \cap, \cup e $\bar{}$ rispettivamente le operazioni di *intersezione*, *unione* e *complementare* in $\mathcal{P}(X)$.
 - (i) Verificare che $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, \bar{})$ è un'algebra di Boole (verificare che sono soddisfatti gli assiomi).
 - (iii) Enunciare e dimostrare le leggi di idempotenza.
 - (ii) Enunciare e dimostrare le leggi di assorbimento.
 - (iv) Enunciare e dimostrare le leggi di De Morgan.

2. Sia \mathcal{B} l'insieme dei sottoinsiemi $B \subset \mathbf{N}$ che soddisfano una delle seguenti condizioni: la cardinalità di B è finita oppure la cardinalità del complementare di B è finita. Dimostrare che $(\mathcal{B}, \cap, \cup, \bar{})$ è un'algebra di Boole.

3. Dato un numero naturale n , si denoti $\mathbf{D}_n = \{m \in \mathbf{N} : m \text{ divide } n\}$. Supponiamo che $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ sia prodotto di k primi *distinti*. Dato $a \in \mathbf{D}_n$, si definisca $\bar{a} := \frac{n}{a}$.
 - (i) Verificare che $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, \bar{})$ è un'algebra di Boole con 2^k elementi.
 - (ii) Enunciare le leggi di idempotenza in $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, \bar{})$.
 - (iii) Enunciare le leggi di assorbimento in $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, \bar{})$.
 - (iv) Enunciare le leggi di De Morgan in $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, \bar{})$.
 - (v) Sia $X = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Verificare che l'applicazione

$$f: \mathbf{D}_n \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad k = p_{i_1} \cdots p_{i_\alpha} \mapsto \{p_{i_1}, \dots, p_{i_\alpha}\}$$

è un isomorfismo di algebre di Boole (ossia un'applicazione biettiva che rispetta le operazioni delle due algebre o equivalentemente che rispetta le rispettive relazioni di ordine. Cominciare magari coi casi $k = 2$ e $k = 3$).

4. Siano X, Y e Z insiemi. Siano dati gli enunciati

$$A: "x \in X", \quad B: "x \in Y", \quad C: "x \in Z".$$

(a) Combinando A, B, C mediante gli operatori logici \wedge, \vee, \neg esprimere i seguenti fatti:
 $x \notin X; \quad x \in Y \cup Z; \quad x \notin Y \cup Z; \quad x \in X \cap Y \cap Z; \quad x \in X \setminus Y \cap Z; \quad x \notin X \cap Y;$
 $x \in X \cap (Y \cup Z); \quad x \in X \cup (Y \cap Z); \quad x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z); \quad x \in (X \setminus Y) \cap (X \cap Z).$

(b) Cosa dicono su x gli enunciati
 $\neg A \wedge B; \quad A \wedge (B \vee \neg C); \quad \neg(A \vee (B \wedge C)); \quad A \vee \neg(B \wedge C); \quad \neg(A \vee B) \vee (A \vee B)??$

5. Verificare le seguenti equivalenze logiche:
 - (a) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \quad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B;$
 - (b) $A \vee \neg A \Leftrightarrow \mathcal{T}, \quad A \wedge \neg A \Leftrightarrow \mathcal{C}$
 - (c) $A \vee A \Leftrightarrow A \wedge A \Leftrightarrow A$

6. Determinare se $\neg A \vee (B \Rightarrow C)$ è o meno una tautologia.

7. Scrivere $((A \Rightarrow B) \wedge B) \Rightarrow A$ in *forma normale disgiuntiva*, ossia come "somma" di "prodotti". Controllare che il risultato finale è logicamente equivalente all'enunciato originale.

8. Scrivere $(\neg(A \wedge B)) \wedge \neg(B \vee A)$ in forma normale disgiuntiva. Determinare se è o meno una contraddizione.
9. (Opzionale) Sia dato l'insieme $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ con le operazioni \oplus , \otimes e $\bar{}$ definite nel seguente modo:

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0, & 1 \oplus 0 &= 0 \oplus 1 = 1, & 1 \oplus 1 &= 1, \\ 1 \otimes 1 &= 1, & 1 \otimes 0 &= 0 \otimes 1 = 0 \otimes 0 = 0, & \bar{0} &= 1, & \bar{1} &= 0. \end{aligned}$$

Dimostrare che $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, \bar{})$ è un'algebra Booleana (verificare che soddisfa gli assiomi).

10. (Opzionale) Sia dato l'insieme $\mathcal{A} = \{000, 010, 001, 100, 110, 101, 011, 111\}$ con le operazioni definite cifra per cifra come nell'esercizio precedente
- (a) Qual è l'identità per \oplus ?
- (b) Qual è l'identità per \otimes ?
- (c) Calcolare le seguenti espressioni:

$$\overline{(001 \otimes 001)} \oplus 100, \quad (111 \otimes 001 \otimes 111) \oplus \overline{100}, \quad (001 \otimes \overline{001}) \otimes \overline{101 \otimes 010} \quad \overline{\overline{101}}.$$

- (d) Dimostrare che $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, \bar{})$ è un'algebra Booleana (verificare che soddisfa gli assiomi).
- (e) Un'algebra di Boole, con le stesse operazioni, è anche un reticolo Booleano. Determinare la relazione di ordine parziale corrispondente, definita da $x \leq y$ se $x \otimes y = x$ (o equivalentemente mediante $x \leq y$ se $x \oplus y = y$).
- (f) Enunciare le leggi di idempotenza.
- (g) Enunciare le leggi di assorbimento.
- (h) Enunciare le leggi di De Morgan.