1. Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

$$A = \emptyset, \qquad B = \{\emptyset\}, \qquad C = \{0\}.$$

2. Sia $X = \{1, 3, 4, 5\}$ e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insiemi delle parti di X. Quali dei seguenti insiemi sono elementi di $\mathcal{P}(X)$?

$$A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{\{1\}, 3\}, \quad C = \emptyset, \quad D = \{\emptyset\}, \quad E = \{\{1, 3\}, \{5\}\}, \quad F = \{1, 4\}.$$

3. Siano dati $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Determinare $A \times A$, $A \times B$ e $B \times A$. A chi appartengono gli elementi $(1, 2)$, $(1, x)$, $(z, 3)$?

4. Sia $A = \{x, y, z\}$. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

$$A \cap (A \setminus A), \quad A \cup (A \cap A), \quad A \cup \mathcal{P}(A), \quad \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A), \quad \mathcal{P}(A \times A).$$

5. Sia data la funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x + 1$.
   (a) Determinare sottoinsiemi A e B di $\mathbf{R}$ tali che $f\colon A \to B$ sia iniettiva ma non suriettiva.
   (b) Determinare sottoinsiemi C e D di $\mathbf{R}$ tali che $f\colon C \to D$ sia suriettiva ma non iniettiva.
   (b) Determinare sottoinsiemi E e F di $\mathbf{R}$ tali che $f\colon E \to F$ sia biiettiva.

6. Sia $A = \{1, 2, 5, 20, 50, 100\}$.
   (a) Disegnare il diagramma di Hasse di $(A, \leq)$, dove $\leq$ è l'ordinamento standard.
   (b) Disegnare il diagramma di Hasse di $(A, \mid)$, dove $\mid$ è l'ordinamento dato dalla "divisibilità" (ossia mRn se $m|n$).
   Che differenza c'è tra i due ordinamenti?

7. Sia $A = \{1, 2, 3\}$.
   (a) Quante relazioni simmetriche si possono definire su A?
   (b) Quante relazioni riflessive e simmetriche si possono definire su A?

8. Verificare che 5 divide $n^5 - n$, per ogni $n \in \mathbf{N}$.

9. Determinare tutti gli interi che soddisfano il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 0 \bmod 2 \\ x \equiv 3 \bmod 7 \\ x \equiv 6 \bmod 11. \end{cases}$$

   Quanti ce ne sono nell'intervallo $[0, 200]$? Determinarli tutti.

10. Calcolare $\varphi(36)$, $\varphi(37)$, $\varphi(81)$, $\varphi(1024)$, dove φ indica la funzione di Eulero. Spiegare quali proprietà di φ avete usato.

11. Calcolare 81^{-1} in $\mathbf{Z}^*_{250}$.

12. Calcolare $1111111^{333333333} \bmod 11$ e $33333333^{333333333}$ modulo 11. Giustificare bene ogni passaggio.

13. Sia Rossi un utente con chiavi pubbliche $N = 221$ ed $E = 7$.
   (a) Spedirgli il messaggio $m = 10$ dopo averlo criptato.

14. Preparare un kit RSA funzionante con chiavi pubbliche N ed E e chiave segreta D.