**Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Modelli e Sistemi**
**Esercizi per il corso di Matematica Discreta - a.a. 2006/2007**
**Docente: Prof. F. Flamini**

**FOGLIO 7 - Esercizi Riepilogativi con soluzioni**

**Esercizio 1**: Stabilire se la congruenza

$$13x \equiv 9 \pmod{25}$$

ammette soluzioni. In caso affermativo, determinare l'espressione generale delle soluzioni della congruenza.
**Svolgimento:** Notiamo che $(13, 25) = 1$ che ovviamente divide $9$. Percio' la congruenza ammette soluzioni. Grazie all'identita' di Bezout

$$1 = 13 \cdot 2 + 25 \cdot (-1).$$

Quindi

$$9 = 13 \cdot 18 + 25 \cdot (-9).$$

Percio' una soluzione della conguenza e' $x_0 = 18$. Poiche' $(13, 25) = 1$, l'espressione della soluzione generale della congruenza e':

$$x = x_0 + k \, \frac{25}{(13,25)} = 18 + 25k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Esercizio 2**: Stabilire se la congruenza

$$207x \equiv 6 \pmod{18}$$

ammette soluzioni. In caso affermativo, determinare l'espressione generale delle soluzioni della congruenza.
**Svolgimento:** Notiamo che $207 = 18 \cdot 11 + 9$ (equivalentemente, in $\mathbb{Z}_{18}$ si ha $[207] = [9]$). Percio' risolvere in $\mathbb{Z}$ la congruenza

$$207x \equiv 6 \pmod{18}$$

e' equivalente a risolvere in $\mathbb{Z}_{18}$ l'equazione

$$[207]x = [6].$$

Risolvere quest'ultima e' equivalente a risolvere l'equazione in $\mathbb{Z}_{18}$

$$[9]x = [6],$$

che e' equivalente a risolvere in $\mathbb{Z}$ la congruenza:

$$9x \equiv 6 \pmod{18}.$$

Poiche' $(9, 18) = 9$ che non divide $6$, la congruenza iniziale non ammette soluzioni.

**Esercizio 3**: Trovare tutti gli interi $x \in \mathbb{Z}$ che soddisfino

$$5x \equiv 8 \pmod{36}.$$

**Svolgimento:** Notiamo che $(5, 36) = 1$ che ovviamente divide $8$. Percio' la congruenza ammette soluzioni. Grazie all'identita' di Bezout

$$1 = 36 \cdot 1 + 5 \cdot (-7).$$

Quindi

$$8 = 36 \cdot 8 + 5 \cdot (-56).$$

Percio' una soluzione della conguenza e' $x_0 = -56$ e quindi, modulo $36$, $x_0 = 16$, poiche' in $\mathbb{Z}_{36}$ si ha $[-56] = [36 \cdot 2 - 56] = [72 - 56] = [16]$. Poiche' $(5, 36) = 1$, l'espressione della soluzione generale della congruenza e':

$$x = 16 + 36k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Esercizio 4**: Stabilire se il sistema monico di congruenze:

$$\begin{cases} x & \equiv & 3 & \pmod{7} \\ x & \equiv & 6 & \pmod{8} \end{cases}$$

ammette soluzioni. In caso affermativo, determinare l'espressione generale delle soluzioni del sistema.

**Svolgimento:** Poiche' $(7, 8) = 1$, per il Teorema Cinese dei resti, sicuramente il sistema ammettera' soluzioni. Grazie all'identita' di Bezout

$$1 = 8(1) + 7(-1).$$

Percio'

$$3 = \underline{8(3)} + 7(-3), \quad 6 = 8(6) + \underline{7(-6)}.$$

Percio' una soluzione particolare sara' la somma delle due parti sottolineate, precisamente

$$x = 8(3) + 7(-6) = 24 - 42 = -18.$$

La soluzione generale sara' quindi

$$x = -18 + 56h,\ h \in \mathbb{Z},$$

equivalentemente

$$x = 38 + 56k,\ k \in \mathbb{Z}.$$