Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Modelli e Sistemi
Esercizi per il corso di Matematica Discreta - a.a. 2006/2007
Docente: Prof. F. Flamini

FOGLIO 6 - Esercizi Riepilogativi con soluzioni

Esercizio 1: Siano

$$a = 1705, \quad b = 625$$

due interi. Calcolare $[a, b]$, i.e. il minimo comune multiplo (*mcm* positivo) tra a e b.
Svolgimento: Dalla teoria generale, sappiamo che per ogni coppia di interi positivi vale

$$a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b],$$

dove (a, b) e' il MCD (positivo) tra a e b. Percio', per detrminare $[a, b]$ e' sufficiente calcolare (a, b) per mezzo dell'algoritmo Euclideo, che fornisce:

- $1705 = 2 \cdot 625 + 455$,
- $625 = 1 \cdot 455 + 170$,
- $455 = 2 \cdot 170 + 115$,
- $170 = 1 \cdot 115 + 55$,
- $115 = 2 \cdot 55 + 5$,
- $55 = 11 \cdot 5$.

Poiche' l'ultimo resto non nullo e' 5, ne segue che

$$(1705, 625) = 5.$$

Quindi

$$[1705, 625] = \frac{1705 \cdot 625}{5} = 213.125.$$

Esercizio 2: Scrivere i naturali 141 e 152 in base 4 e farne la somma ed il prodotto in tale base.
Svolgimento: Con le divisioni successive, risulta che

$$141 = 2 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 4^0,$$

quindi la notazione 4-adica di 141 e'

$$2031.$$

Analogamente si ha:

$$152 = 2 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 4^0,$$

quindi la notazione 4-adica di 152 e'

$$2120.$$

Ora per la somma 4-adica si ha:

$$2031 + 2120 = 10211,$$

per il prodotto 4-adico si ha

$$2031 \times 2120 = 11032320.$$

Esercizio 3: Scrivere 318 in notazione 6-adica.
Svolgimento: Risulta

$$318 = 1 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 0 \cdot 6^0,$$

percio' la notazione 6-adica di 318 e' 1250.

Esercizio 4: Scrivere in notazione binaria l'intero decimale 320.
Svolgimento: Come negli esercizi precedenti si ha:

$$320 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2^0,$$

percio' la notazione binaria di 350 e':

$$101000000.$$

Esercizio 5: Sia $(\mathbb{Z}_6, +)$ il gruppo degli interi modulo 6.
(i) Determinare tutti i sottogruppi di $(\mathbb{Z}_6, +)$;
(ii) Determinare la decomposizione di $\mathbb{Z}_6$ in laterali destri rispetto ad ogni singolo sottogruppo non banale di $\mathbb{Z}_6$.
Svolgimento: Sia

$$\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}.$$

Poiche' $(1,6) = (5,6) = 1$ in $\mathbb{Z}$, allora sappiamo che $\mathbb{Z}_6$ e' ciclico generato da

$$\mathbb{Z}_6 =< [1] >=< [5] > .$$

Di conseguenza, ogni sottogruppo di $\mathbb{Z}_6$ e' ciclico.

Osserviamo che

$$[2] + [2] + [2] = [0],\ [3] + [3] = [0],\ [4] + [4] + [4] = [0].$$

Percio'

$$ord([2]) = ord([4]) = 3,\ ord([3]) = 2.$$

Per il Teorema di Lagrange, i possibili ordini dei sottogruppi di $\mathbb{Z}_6$ sono

$$1,\ 2,\ 3,\ 6.$$

Pertanto, se esistono, i sottogruppi non banali devono avere ordine o 2 o 3.

Notiamo che per ordine 3, ne esiste solo uno che e'

$$H =< [2] >=< [4] > .$$

Anche per ordine 2 ne esiste solo uno che e'

$$K =< [3] > .$$

(ii) I laterali distinti rispetto ad H sono $[\mathbb{Z}_6 : H] = 2$; in effetti si ha

$$H = \{[0], [2], [4]\},\ H + [1] = \{[1], [3], [5]\},$$

pertanto

$$\mathbb{Z}_6 = H \cup (H + [1])$$

e' la decomposizione richiesta.

I laterali distinti rispetto a K sono $[\mathbb{Z}_6 : K] = 3$. In effetti si ha

$$K = \{[0], [3]\},\ K + [1] = \{[1], [4]\},\ K + [2] = \{[2], [5]\}$$

pertanto

$$\mathbb{Z}_6 = K \cup (K + [1]) \cup (K + [2])$$

e' la decomposizione richiesta.