Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Modelli e Sistemi
Esercizi per il corso di Matematica Discreta - a.a. 2006/2007
Docente: Prof. F. Flamini

FOGLIO 5 - Esercizi Riepilogativi con soluzioni

Esercizio 1: Dimostrare per induzione che

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(3j-1)(3j+2)} = \frac{n}{6n+4}.$$

Svolgimento: L'eguaglianza e' vera per $n = 1$, infatti

$$\frac{1}{(3-1)(3+2)} = \frac{1}{10} = \frac{1}{6+4}.$$

Supponiamo ora che l'eguaglianza sia vera per $k \in \mathbb{N}$ e vogliamo dimostrare che vale anche per $k+1$. Grazie al principio di induzione (I Forma), allora sara' vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Sia dunque

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(3j-1)(3j+2)} = \frac{k}{6k+4};$$

percio'

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(3j-1)(3j+2)} = \Big(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(3j-1)(3j+2)}\Big) + \frac{1}{(3(k+1)-1)(3(k+1)+2)}$$

$$= \frac{k}{6k+4} + \frac{1}{(3(k+1)-1)(3(k+1)+2)} = \frac{3k^2+5k+2}{2(3k+2)(3k+5)} = \frac{k+1}{6k+10} = \frac{k+1}{6(k+1)+4}.$$

Esercizio 2: Dimostrare per induzione che

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Svolgimento: L'eguaglianza e' vera banalmente per $n = 1$, infatti $\frac{1\cdot(2)}{2} = 1$. Supponiamo ora che l'eguaglianza sia vera per $k \in \mathbb{N}$ e vogliamo dimostrare che vale anche per

$k+1$. Grazie al principio di induzione (I Forma), allora sara' vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia dunque

$$\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ora

$$\sum_{j=1}^{k+1} j = \Big(\sum_{j=1}^{k} j\Big) + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = (k+1)(\frac{k}{2}+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Esercizio 3: Siano

$$a = 1705, \quad b = 625$$

due interi.
(i) Calcolare (a,b), i.e. il Massimo Comun Divisore (*MCD*) tra a e b;
(ii) Esprimere (a,b) nell'identita' di Bezout, i.e. trovare gli unici interi s e t tali che

$$(a,b) = as + bt.$$

Svolgimento: (i) Per l'algoritmo di Euclide delle divisioni con resto si ha:

- $1705 = 2 \cdot 625 + 455$,
- $625 = 1 \cdot 455 + 170$,
- $455 = 2 \cdot 170 + 115$,
- $170 = 1 \cdot 115 + 55$,
- $115 = 2 \cdot 55 + 5$,
- $55 = 11 \cdot 5$.

Poiche' l'ultimo resto non nullo e' 5, ne segue che

$$(1705, 625) = 5.$$

(ii) Percorrendo a ritroso tutte le espressioni ottenute con l'algoritmo Euclideo, si ha

$$5 = 115 - 2 \cdot 55 = 115 - 2(170 - 1 \cdot 115) = 3 \cdot 115 - 2 \cdot 170 = 3(455 - 2 \cdot 170) - 2 \cdot 170 =$$

$$= 3 \cdot 455 - 8 \cdot 170 = 3 \cdot 455 - 8(625 - 1 \cdot 455) = 11 \cdot 455 - 8 \cdot 625 =$$

$$= 11(1705 - 2 \cdot 625) - 8 \cdot 625 = 11 \cdot 1705 - 30 \cdot 625.$$

Percio' gli interi cercati sono $s = 11$ e $t = -30$.

Esercizio 4: Siano
$$a = 726, \quad b = 275$$
due interi.
(i) Calcolare (a, b);
(ii) Esprimere (a, b) nell'identita' di Bezout, i.e. trovare gli unici interi s e t tali che
$$(a, b) = as + bt.$$
Svolgimento: Con procedimento analogo all'Esercizio 3, si trova $(a, b) = 11$ e che
$$11 = 11 \cdot 726 - 29 \cdot 275,$$
cioe' $s = 11$ e $t = -29$.

Esercizio 5: Siano $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che:
(i) se $c|ab$ e $(a, c) = 1$ allora $c|b$;
(ii) se $(a, c) = (b, c) = 1$ allora $(ab, c) = 1$.
Svolgimento: (i) Poiche' $(a, c) = 1$, dall'identita' di bezout, esistono e sono univocamente determinati due interi s e t tali che
$$1 = (a, c) = as + ct.$$
Percio'
$$b = b \cdot 1 = bas + bct.$$
Ora $c|bas$ perche' per ipotesi $c|ba = ab$; inoltre $c|bct$ ovviamente. Quindi $c|b$, come volevasi dimostrare.
(ii) Supponiamo per assurdo che si abbia $(ab, c) = d > 1$. In particolare, $d|ab$ e $d|c$. Poiche' per ipotesi $(a, c) = 1$, allora ogni numero primo p presente nella fattorizzazione di d in numeri primi non puo' dividere a. In particolare, per ogni tale p, poiche' $p|d|ab$ ma p non divide a e poiche' p e' un numero primo, allora necessariamente $p|b$. Ma poiche' $p|d|c$, dalla ipotesi $(b, c) = 1$, non puo' esistere un tale primo p. Percio' si ottiene una contraddizione e quindi $d = 1$.