Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Modelli e Sistemi
Esercizi per il corso di Matematica Discreta - a.a. 2006/2007
Docente: Prof. F. Flamini

FOGLIO 2 - Esercizi Riepilogativi con soluzioni

Esercizio 1: Calcolare il numero delle diagonali di un poligono regolare con n lati, $n \geq 3$ un numero naturale.
Svolgimento: I vertici del poligono sono in numero n. I segmenti che li congiungono a due a due sono quindi $\binom{n}{2}$. Ma fra tali segmenti, si stanno contando pure gli n lati del poligono. Quindi il numero delle diagonali e'

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Esercizio 2: Quante quaterne si possono formare con i 90 numeri del lotto?
Svolgimento: Le quaterne richieste sono esattamente le combinazioni dei 90 numeri del lotto, presi a quattro a quattro. Quindi tale numero e' esattamente

$$\binom{90}{4} = 2.555.190.$$

Esercizio 3: Quante sono le possibili schedine nel gioco del Totocalcio? Equivalentemente, in quanti modi si possono disporre i segni 1, 2 e X nelle 13 caselle della schedina?
Svolgimento: I modi sono tanti quante le disposizioni con ripetizioni di tre oggetti in 13 caselle. Percio' questo numero e' 3^{13}.

Esercizio 4: Supponiamo di avere 3 palline e 5 barattoli. Quanti sono i modi possibili di mettere le palline in tali barattoli, in modo tale che ciascun barattolo contenga al piu' una pallina?
Svolgimento: I modi possibili sono ovviamente tanti quante le applicazioni iniettive da un insieme di cardinalita' 3 (le palline) ad un insieme di cardinalita' 5 (i barattoli). Percio', questo e' il numero delle disposizioni senza ripetizioni, con $n = 5$ e $k = 3$, che e':

$$n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Esercizio 5: Quanti oggetti si possono combinare a 2 a 2 per ottenere 66 combinazioni distinte?
Svolgimento: Indichiamo con x il numero degli oggetti da determinare. Allora si avra'

$$\binom{x}{2} = 66,$$

cioe' $\frac{x(x-1)}{2} = 66$. Questo determina l'equazione di secondo grado

$$x^2 - x - 132 = 0.$$

Tale equazione ammette le due soluzioni reali e distinte

$$x = -11 \text{ e } x = 12.$$

Ovviamente la soluzione negativa va esclusa, perche' priva di significato rispetto al problema cui siamo interessati. Percio' il numero degli oggetti e' 12.

Esercizio 6: Calcolare la seguente potenza di binomio:

$$(x^2 - 1)^6.$$

Svolgimento: Per la regola di Tartaglia, abbiamo:

$$(x^2-1)^6 = \binom{6}{0}x^{12} - \binom{6}{1}x^{10} + \binom{6}{2}x^8 - \binom{6}{3}x^6 + \binom{6}{4}x^4 - \binom{6}{5}x^2 + \binom{6}{6} =$$
$$= x^{12} - 6x^{10} + 15x^8 - 20x^6 + 15x^4 - 6x^2 + 1.$$

Esercizio 7: Sia $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Denotiamo con Σ_S l'insieme delle biezioni di S in se'. Sia

$$\circ : \Sigma_S \times \Sigma_S \to \Sigma_S$$

l'operazione di composizione di applicazioni (o *prodotto operatorio*). Consideriamo allora il gruppo $(\Sigma_S, \circ)$.
(i) Determinare la cardinalita' di questo gruppo;
(ii) Per ogni elemento $\sigma \in \Sigma_S$, denotiamo con $\sigma^{-1} \in \Sigma_S$ quell'unico elemento tale che

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = id_S,$$

cioe' l'*inverso* di σ. Per ogni elemento $\sigma \in \Sigma_S$, determinare chi e' σ^{-1}.
Svolgimento: Provarci da soli.