Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Modelli e Sistemi
Esercizi per il corso di Matematica Discreta - a.a. 2006/2007
Docente: Prof. F. Flamini

FOGLIO 1 - Esercizi Riepilogativi con soluzioni

Esercizio 1: Sia U l'insieme dei primi dieci numeri naturali. Si considerino i suoi seguenti sottoinsiemi:

$$K = \{2,4,6,8\}, \ L = \{1,2,3,4\}, \ M = \{3,4,5,6,8\}.$$

Denotati rispettivamente con

$$K_U^c, \ L_U^c, \ M_U^c$$

i complementari dei sottoinsiemi in U:
(i) Scrivere tutti gli elementi di $K_U^c, \ L_U^c$, e M_U^c.
(ii) Verificare concretamente che

$$K_U^c \cap L_U^c = (K \cup L)_U^c.$$

Svolgimento: (a) Ovviamente $K_U^c = \{1,3,5,7,9,10\}$, $L_U^c = \{5,7,8,9,10\}$ e $M_U^c = \{1,2,7,9,10\}$.
(ii) Notiamo che $K \cup L = \{1,2,3,4,6,8\}$. Quindi $(K \cup L)_U^c = \{5,7,9,10\}$. Dal punto precedente, notiamo che questo coincide proprio con $K_U^c \cap L_U^c$.

Esercizio 2: Dati due sottoinsiemi qualsiasi X e Y di un insieme fissato A, verificare che $X \subseteq Y$ se e solo se $Y_A^c \subset X_A^c$.
Svolgimento: $\Rightarrow$) Per ipotesi abbiamo $X \subseteq Y$. Sia $b \in Y_A^c$ un qualsiasi elemento. Allora, b non appartiene ad X, perche' non appartiene a Y. Quindi necessariamente $b \in X_A^c$. Poiche' per ipotesi b era un qualsiasi elemento di Y_A^c, segue che $Y_A^c \subset X_A^c$.
$\Leftarrow$) Per ipotesi $Y_A^c \subset X_A^c$. Dall'implicazione precedente, se passiamo ai complementari, otteniamo l'asserto.

Esercizio 3: Ci sono 100 persone in una stanza.
(i) In tale gruppo di 100 persone, 60 sono uomini, 30 sono persone giovani e 10 sono uomini giovani. Quante sono le donne anziane?

(ii) Assumiamo che le 100 persone del gruppo abbiano esclusivamente o occhi marroni o occhi azzurri. Supponiamo che si sappia che tra le 100 persone 40 abbiano gli occhi azzurri, 20 sono uomini con occhi azzurri, 15 sono persone giovani con occhi azzurri e 5 sono giovani uomini con occhi azzurri. Quante sono le donne anziane con occhi marroni?

Svolgimento: Ambedue i punti si risolvono utilizzando il principio di inclusione ed eclusione.

(i) Nel primo caso, nell'insieme con 100 persone, abbiamo due proprieta' da sfruttare: il fatto di essere o uomo o donna ed il fatto di essere o giovane o anziano. La proprieta' 1 sara' ad esempio "essere uomo" la proprieta' 2 sara' "essere giovane". Quindi se G e' l'insieme totale di persone, G_1 e' il sottoinsieme i cui elementi soddisfano la proprieta' 1 e G_2 quello i cui elementi soddisfano la proprieta' 2, allora la risposta e' data da

$$|G| - |G_1| - |G_2| + |G_1 \cap G_2| = 100 - 60 - 30 + 10 = 20.$$

(ii) Con stesso procedimento, abbiamo tre proprieta': ad esempio essere uomo, essere giovane, avere gli occhi azzurri. per il principio di inclusione ed esclusione si ottiene che la risposta e' data da

$$100 - 60 - 30 - 40 + 10 + 20 + 15 - 5 = 10.$$

Esercizio 4: Nell'insieme degli interi $\mathbb{Z}$ si considerino:

(i) la seguente relazione: $x \sim_1 y$ se e solo se $x \leq y$, per $x, y \in \mathbb{Z}$. Stabilire se $\sim_1$ e' una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$.

(ii) la seguente relazione $x \sim_2 y$ se e solo se 3 divide l'intero $x - y$, per $x, y \in \mathbb{Z}$. Dopo aver verificato che e' una relazione di equivalenza, descrivere le classi di equivalenza e determinare la relativa partizione di $\mathbb{Z}$.

Svolgimento: (i) Ovviamente $\sim_1$ non gode della proprieta' simmetrica. Quindi non e' di equivalenza.

(ii) $\sim_2$ e' banalmente di equivalenza. Le classi di equivalenza sono date da

$$[0] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\},\ [1] = \{\ldots, -5, -2, 0, 1, 4, 10, \ldots\}$$

e

$$[2] = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$$

e si ha la partizione

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2],$$

dove i sottoinsiemi sono a 2 a 2 disgiunti.

Esercizio 5: Quali tra le seguenti applicazioni risultano iniettive ? suriettive? biiettive? Nel caso in cui non sia suriettiva, trovare l'insieme immagine. Nel caso sia biiettiva trovare l'inversa.
(a) $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = x^3$;
(b) $f_b : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_b(x) = 5x$;
(c) $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_c(x) = x^2 + 1$;
(d) $f_d : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f_1(x) = 1 - (1 + 2x)^2$.
Svolgimento: Provarci da soli.