5. Rette e piani in $\mathbf{R}^3$; sfere.

In questo paragrafo studiamo le rette, i piani e le sfere in $\mathbf{R}^3$. Ci sono due modi per descrivere piani e rette in $\mathbf{R}^3$: mediante *equazioni cartesiane* oppure mediante *equazioni parametriche.* Cominciamo con le equazioni parametriche delle rette. La situazione è molto simile a quella in $\mathbf{R}^2$. Un'*equazione parametrica* di una retta in $\mathbf{R}^3$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + tv_1 \\ p_2 + tv_2 \\ p_3 + tv_3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

ossia

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

ponendo come al solito $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Il vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ è un *vettore parallelo* alla retta e il punto $\mathbf{p}$ è un punto sulla retta. Al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$ vengono descritti tutti i punti della retta: il punto $\mathbf{p}$ corrisponde a $t = 0$. Ad esempio, l'equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

definisce la retta parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e passante per il punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

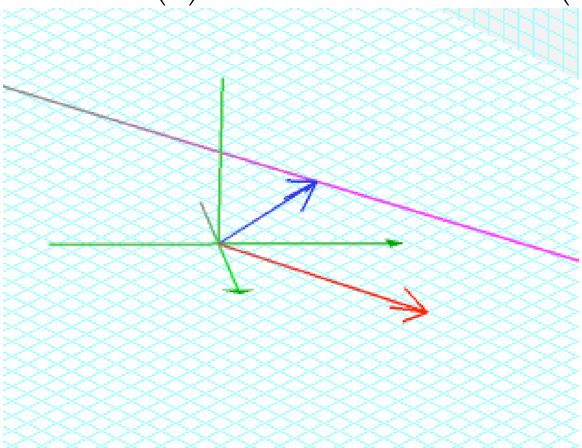


Fig.10. La retta $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per $t = 0$, $t = 1$ e $t = -1/3$ troviamo rispettivamente i punti della retta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Come nel caso di $\mathbf{R}^2$ due equazioni parametriche distinte possono descrivere la stessa retta: se $\mathbf{p}'$ è un altro punto sulla retta e $\mathbf{v}'$ è un vettore parallelo a $\mathbf{v}$, le equazioni

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \ t \in \mathbf{R} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{p}' + s\mathbf{v}', \ s \in \mathbf{R}$$

descrivono la stessa retta.

Similmente si hanno equazioni parametriche per i piani in $\mathbf{R}^3$. Un'*equazione parametrica* di un piano in $\mathbf{R}^3$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + tv_1 + sw_1 \\ p_2 + tv_2 + sw_2 \\ p_3 + tv_3 + sw_3 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbf{R},$$

ossia

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \qquad t, s \in \mathbf{R},$$

ponendo come al solito $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$. Il punto $\mathbf{p}$ è un punto del piano, i vettori $\mathbf{v} \neq 0$ e $\mathbf{w} \neq 0$ sono *vettori paralleli* al piano. Per ottenere effettivamente un piano è necessario che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, oltre ad essere non nulli, *non* siano uno multiplo dell'altro, cioè $\mathbf{v} \neq \lambda\mathbf{w}$. Al variare dei parametri t ed $s \in \mathbf{R}$ vengono descritti tutti i punti del piano: il punto $\mathbf{p}$ corrisponde a $t = s = 0$. Ad esempio, l'equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbf{R},$$

definisce il piano parallelo ai vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e passante per il punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

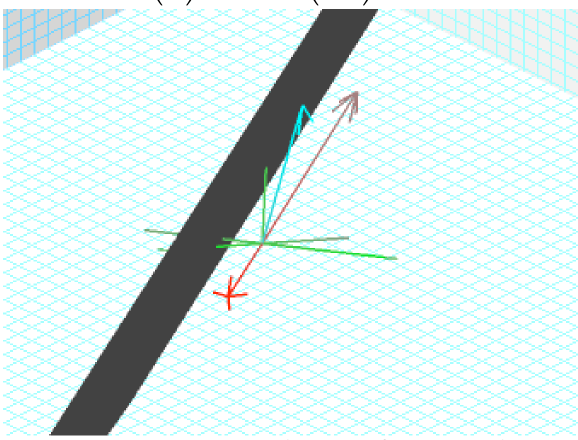


Fig.11. Il piano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Assegnando ai parametri i valori $t = s = 0$, oppure $t = 1$, $s = 0$, oppure $t = -1/3$, $s = -2$ si trovano rispettivamente i punti del piano

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso, due equazioni parametriche distinte possono descrivere lo stesso piano: se $\mathbf{p}'$ è un altro punto del piano e $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ sono vettori tali che $\text{span}\{\mathbf{v}', \mathbf{w}'\} = \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, allora

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}' + t'\mathbf{v}' + s'\mathbf{w}', \quad t', s' \in \mathbf{R}$$

è un'altra equazione dello stesso piano.

Le rette ed i piani nello spazio si possono anche rappresentare mediante *equazioni cartesiane.* I punti $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ che soddisfano un'equazione lineare

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \tag{$*$}$$

dove $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ed a, b, c non sono tutti nulli, formano un piano. Questo si vede facilmente "risolvendo il sistema lineare" di una sola equazione in tre incognite (*). Le soluzioni dipendono da due parametri liberi. Per esempio, risolvendo l'equazione $x_2 + 2x_3 = 4$ possiamo scegliere come parametri liberi x_1 e x_3. Se chiamiamo $x_1 = s$ ed $x_3 = t$, allora $x_2 = 4 - 2x_3 = 4 - 2t$ e troviamo il piano di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 4-2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione cartesiana di un piano non è unica. Se λ è un numero reale non nullo, le equazioni

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \quad \text{e} \quad \lambda ax_1 + \lambda bx_2 + \lambda cx_3 = \lambda d$$

definiscono lo stesso piano.

Definizione. Un vettore *normale* ad un piano è un vettore $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ che è perpendicolare al piano.

Proposizione 5.1. *Sia π il piano di equazione cartesiana*

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d.$$

Allora, il vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *è un vettore normale a π.*

Dimostrazione. Notiamo che $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non è zero perchè a, b, c non sono tutti nulli. Controlliamo che $\mathbf{n}$ è perpendicolare al piano. Dati due punti distinti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ del piano, il vettore $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ è parallelo al piano. Calcolando

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= (x_1 - y_1)a + (x_2 - y_2)b + (x_3 - y_3)c \\ &= (ax_1 + bx_2 + cx_3) - (ay_1 + by_2 + cy_3) = d - d = 0\end{aligned}$$

troviamo che, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \pi$, il prodotto scalare $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}$ è zero. Poiché tutti i vettori paralleli al piano π sono di questa forma, si ha che $\mathbf{n}$ è perpendicolare a π, come richiesto.

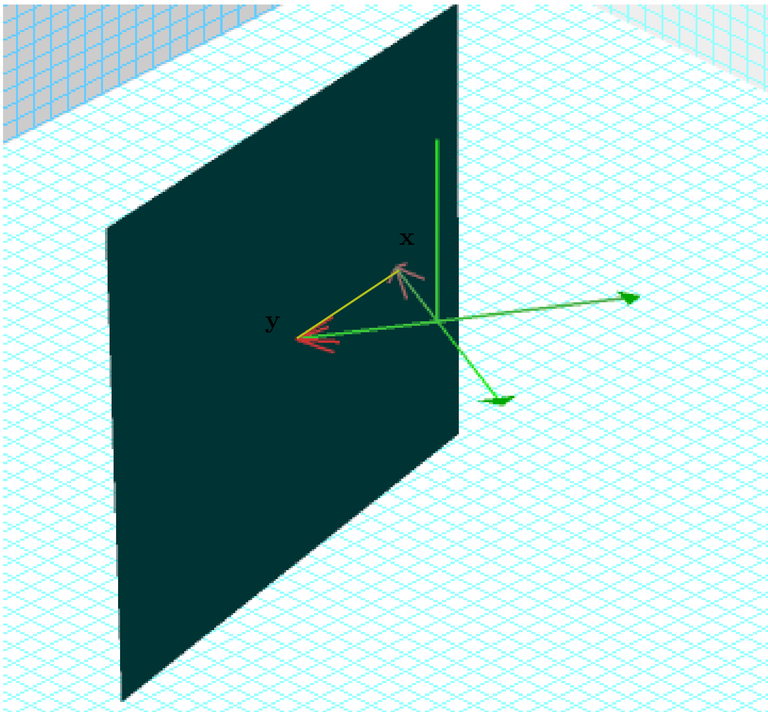


Fig.12. $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ è parallelo al piano.

Osservazione. Se

$$ax + by + cz = d \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \qquad t, s \in \mathbf{R}$$

sono rispettivamente un'equazione cartesiana ed un'equazione parametrica dello stesso piano, allora il vettore normale $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è perpendicolare ai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

I punti di $\mathbf{R}^3$ che soddisfano un sistema lineare di *due* equazioni in tre incognite

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} ax_1 & + & bx_2 & + & cx_3 & = & d \\ a'x_1 & + & b'x_2 & + & c'x_3 & = & d', \end{array} \right. \tag{$**$}$$

ove le terne a, b, c e a', b', c' sono entrambe non nulle, sono precisamente i punti contenuti sia nel piano di equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ che nel piano di equazione $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d'$.

Quando l'intersezione dei due piani è una retta, si dice che le equazioni del sistema sono *equazioni cartesiane* per la retta. Per esempio, i punti $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ tali che

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

formano una retta in $\mathbf{R}^3$. Poiché il sistema è già "a scala", ponendo $x_3 = s$ come parametro libero, ricaviamo $x_2 = (4 - x_3)/2 = 2 - s/2$ ed $x_1 = 1 - 3s + 2(2 - s/2) = 5 - 4s$. Troviamo così la retta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 - 4s \\ 2 - s/2 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Come si intuisce facilmente, le equazioni cartesiane di una retta non sono uniche: ci sono infatti infinite coppie di piani che si incontrano in una data retta.

Proposizione 5.2. *Siano*

$$\begin{cases} ax_1 & + & bx_2 & + & cx_3 & = & d \\ a'x_1 & + & b'x_2 & + & c'x_3 & = & d', \end{cases}$$

equazioni cartesiane di una retta r in $\mathbf{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{n}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ generano un piano ν perpendicolare ad r.

Dimostrazione. Poiché la retta r è contenuta sia nel piano di equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ che in quello di equazione $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d'$, essa è ortogonale sia ad $\mathbf{n}$ che a $\mathbf{n}'$. Sia $\mathbf{x}$ un generico punto di r. Poiché

$$\mathbf{x} \cdot (t\mathbf{n} + s\mathbf{n}') = t\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} + s\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}' = 0, \qquad \text{per ogni } s, t \in \mathbf{R}$$

si ha che la retta r è perpendicolare a ν come richiesto.

Osservazione. Come conseguenza della Proposizione 5.2, il prodotto vettoriale $\mathbf{n} \times \mathbf{n}'$ definisce un vettore parallelo ad r.

Abbiamo visto i due modi per descrivere rette e piani in $\mathbf{R}^3$. Abbiamo spiegato come passare da equazioni cartesiane ad equazioni parametriche. Vediamo adesso, mediante esempi espliciti, come passare da equazioni parametriche ad equazioni cartesiane.

Esempio 5.3. Sia l la retta data da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbf{R}.$$

Per trovare delle equazioni cartesiane di l, eliminiamo il parametro s dal sistema

$$\begin{cases} x_1 = & 1 & + & 2s \\ x_2 = & -1 & + & s \\ x_3 = & & - & 2s. \end{cases}$$

Il parametro s si può eliminare in diversi modi. Ricavando ad esempio s dalla seconda equazione, troviamo $s = x_2 + 1$, che sostituito nelle altre due equazioni, ci dà:

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 & + & 2(x_2+1) & = & 2x_2 + 3 \\ x_3 & = & & - & 2(x_2+1) & = & -2x_2 - 2. \end{cases}$$

Queste sono delle equazioni cartesiane della retta l.

Esempio 5.4. Sia π il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbf{R}.$$

Per scrivere un'equazione cartesiana

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

di π abbiamo bisogno innanzitutto di un vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ortogonale a π ed, in particolare, ortogonale a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le coordinate di $\mathbf{n}$ devono dunque soddisfare le condizioni

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2a + b - 2c = 0,$$
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = b + 2c = 0,$$

ossia il sistema lineare

$$\begin{cases} 2a + b - 2c = 0 \\ b + 2c = 0. \end{cases}$$

Poiché il sistema è a scala, possiamo ricavare $b = -2c$ ed $a = (2c - b)/2 = (2c + 2c)/2 = 2c$ in funzione del parametro libero c, cosicché

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ -2c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

Ponendo ad esempio $c = 1$, troviamo $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determiniamo infine il termine noto d sostituendo nell'equazione un punto del piano. Usando per esempio il punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dell'equazione parametrica, troviamo $2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 0 = d$ e quindi $d = 4$. L'equazione cercata è

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4.$$

Osservazione. Un altro modo per ottenere il vettore $\mathbf{n}$ è quello di calcolare il prodotto vettoriale dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esempio 5.5. (*piano per 3 punti*) Come determinare il piano π passante per tre punti dati in $\mathbf{R}^3$? C'è da osservare che il piano è unico se e solo se i tre punti non stanno sulla stessa retta. Siano dati, per esempio,

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Allora i vettori $\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{p} - \mathbf{r}$ dati da

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti e paralleli al piano π cercato. Un'equazione parametrica di π è data dunque da $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}$, per $s, t \in \mathbf{R}$, ossia

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbf{R}.$$

Esempio 5.6 (*Intersezioni*)

1. Siano dati due piani π_1 e π_2. Come calcolare l'intersezione $\pi_1 \cap \pi_2$? Se π_1 e π_2 sono dati mediante equazioni cartesiane, c'è da risolvere un sistema lineare di due equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3. Se l'intersezione di due piani non è una retta, ci sono due possibilità:

– *i due piani sono paralleli.* Questo corrisponde al caso in cui il sistema corrispondente non ha soluzioni. Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

è incompatibile e i due piani $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$ e $2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3$ sono paralleli.

– *I due piani coincidono.* Questo corrisponde al caso in cui le equazioni del sistema corrispondente hanno esattamente le stesse soluzioni, dipendenti da due parametri liberi. Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

è equivalente al sistema "a scala"

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad\qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni hanno x_2 ed x_3 come parametri liberi. Se uno dei due piani è dato in forma parametrica, ci si può ricondurre al caso di due equazioni cartesiane con i metodi sopra esposti. Per esempio, sia π_1 il piano di equazione

$$x_1 + 2x_3 = 2$$

e sia π_2 il piano dato da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbf{R}.$$

Allora un vettore normale a π_2 è dato da $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, per cui un'equazione cartesiana di π_2 è

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1.$$

Per calcolare l'intersezione dei due piani, risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Sommando due volte la prima equazione alla seconda, troviamo il sistema "a scala"

$$\begin{cases} x_1 + + 2x_3 = 2 \\ \qquad 2x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = s$ come parametro libero, ricaviamo $x_2 = (3-5s)/2 = 3/2 - 5s/2$ ed $x_1 = 2 - 2s$. In conclusione, l'intersezione è una retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2-2s \\ 3/2 - 5/2 \cdot s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbf{R}.$$

2. Sia π un piano in $\mathbf{R}^3$ dato in forma cartesiana e sia l una retta in forma parametrica. La loro intersezione consiste nei punti della retta l che soddisfano l'equazione di π. Per esempio, sia π il piano di equazione $2x_1 - 3x_3 = 1$ e sia l la retta data da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbf{R}.$$

Allora un punto $\mathbf{x}$ della retta l è contenuto in π se e soltanto se

$$2(1+2s) + 0(1+5) - 3(-1+s) = 1,$$

cioè se e solo se $s = -4$. Questo valore di s corrisponde all'unico punto di intersezione $\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$. Può succedere che la retta sia parallela a π oppure contenuta in π. Nel primo caso nessun punto della retta soddisfa l'equazione del piano, nel secondo la soddisfano tutti.

3. Siano l ed m due rette in $\mathbf{R}^3$. Ci sono tre possibilità: le rette si intersecano in un punto, le rette coincidono, le rette sono parallele oppure sono "sghembe". Due rette sono sghembe se non hanno punti in comune e non sono parallele.

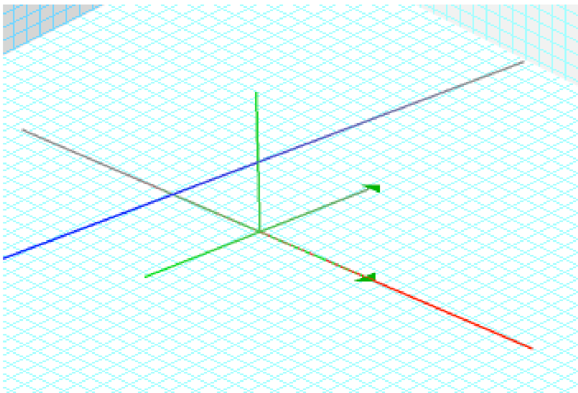


Fig.13. Due rette sghembe.

Consideriamo, ad esempio, le rette l ed m di equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Le rette l ed m non sono parallele. Per trovare l'intersezione di l ed m poniamo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e risolviamo il sistema lineare di tre equazioni nelle incognite s e t. Si verifica facilmente che il sistema non ha soluzioni e le due rette sono sghembe.

Lasciamo al lettore il compito di trovare metodi per calcolare l'intersezione di due rette l ed m quando non sono date entrambe in forma parametrica. Il principio è sempre quello di trovare i punti che soddisfano sia le equazioni di l che quelle di m. Alla fine ci si riconduce sempre a risolvere un sistema lineare.

Teorema 5.7. *Sia* $\mathbf{p}$ *un punto in* $\mathbf{R}^3$ *e sia* π *il piano di equazione*

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.$$

Allora, la distanza di $\mathbf{p}$ *dal piano* π *è data da*

$$\frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dimostrazione. Poiché $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è un vettore normale a π, la retta l perpendicolare a π e passante per $\mathbf{p}$ ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbf{R}.$$

Per calcolare il punto di intersezione $\mathbf{q}$ fra l e π, sostituiamo il punto generico di l nell'equazione del piano

$$a(p_1 + sa) + b(p_2 + sb) + c(p_3 + sc) + d = 0$$

e ricaviamo s

$$s = -\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Il punto $\mathbf{q}$ corrispondente è:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

La distanza fra $\mathbf{p}$ e il piano π è uguale alla distanza fra $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$

$$d(\mathbf{p}, \pi) = d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \| \frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \| = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

come richiesto.

Esempio 5.8. (*distanza fra due rette sghembe*) Come calcolare la distanza fra due rette sghembe l ed m in $\mathbf{R}^3$? Un metodo è quello di calcolare un'equazione cartesiana di un piano π che *passa* per una delle due rette ed *è parallelo* all'altra. Dopodiché la distanza $d(l, m)$ è uguale alla distanza fra π e un qualsiasi punto dell'altra retta. Per esempio, siano l ed m le rette date da

$$l: \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad m: \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbf{R}.$$

Per trovare un'equazione parametrica del piano π contenente m e parallelo ad l, calcoliamo innanzitutto un'equazione parametrica di l:

$$l: \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Il piano π ha vettore normale $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e contiene il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; dunque un'equazione cartesiana di π è data da $-x_1 + 2x_2 = 2$. Prendiamo infine il punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sulla retta l. Allora la distanza $d(l, m)$ è uguale alla distanza fra π e $\mathbf{p}$, cioè

$$d(l, m) = d(\mathbf{p}, \pi) = \frac{|-1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

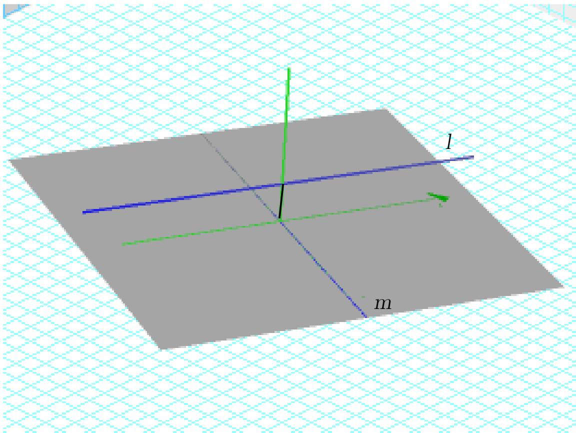


Fig.14. La distanza fra l ed m.

Definizione. Una *sfera* in $\mathbf{R}^3$ di centro $\mathbf{c}$ e raggio r è l'insieme dei punti che ha distanza uguale ad r da $\mathbf{c}$.

Siccome i punti $\mathbf{x}$ sulla sfera di centro $\mathbf{c}$ e raggio r sono i punti che soddisfano

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = r,$$

l'equazione della sfera è data da

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 = r^2.$$

Proposizione 5.9. *Sia $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 = r^2$ una sfera S in $\mathbf{R}^3$ di centro $\mathbf{c}$ e raggio r. Un'equazione del piano tangente alla sfera nel punto $\mathbf{q} \in S$ è data da*

$$(q_1 - c_1)(x_1 - q_1) + (q_2 - c_2)(x_2 - q_2) + (q_3 - c_3)(x_3 - q_3) = 0.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}$ un punto arbitrario su detta tangente. Poiché il piano tangente in $\mathbf{q}$ è perpendicolare alla retta passante per $\mathbf{q}$ ed il centro della sfera $\mathbf{c}$, si ha che:

$$(\mathbf{q} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q}) = 0$$

come richiesto.

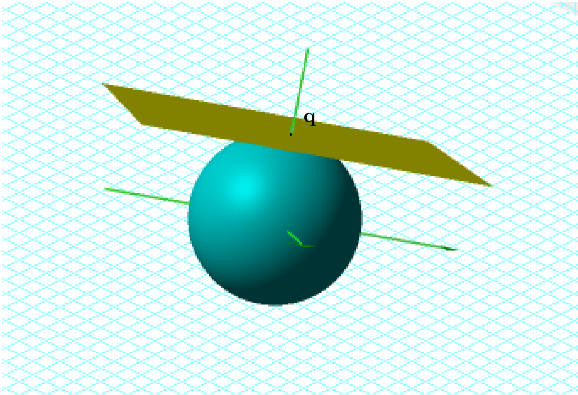


Fig.15. Il piano tangente alla sfera nel punto $\mathbf{q}$.

Esempio 5.10. (*Intersezione fra una retta e una sfera*) Tramite un esempio esplicito, consideriamo ora il problema di calcolare l'intersezione fra una retta ed una sfera. Sia S la sfera di equazione

$$(x_1-2)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2=9$$

e sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\qquad t\in\mathbf{R}.$$

Per calcolare l'intersezione $S\cap l$ sostituiamo il punto generico della retta l nell'equazione della sfera S:

$$((1+t)-2)^2+((3+t)-1)^2+((1+2t)-1)^2=9.$$

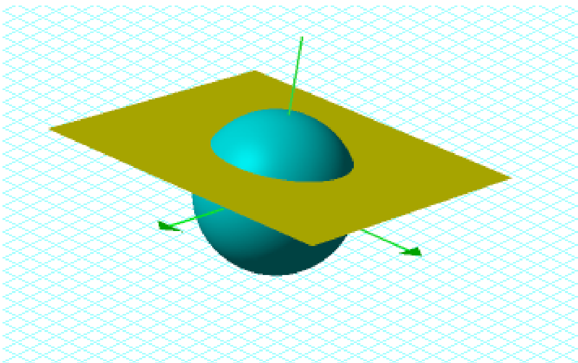
L'equazione diventa $6t^2+2t-4=0$. Risolvendo troviamo $t=-1$ oppure $t=2/3$, corrispondenti ai punti di intersezione

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}5/3\\11/3\\7/3\end{pmatrix}.$$

In generale, a seconda che l'equazione quadratica in t ammetta due, una o nessuna soluzione reale, si ha rispettivamente che la retta interseca la sfera in due punti, un punto (in questo caso la retta è tangente alla sfera) o nessun punto.

Analogamente, l'intersezione di una sfera con un *piano* può essere una circonferenza in $\mathbf{R}^3$, un punto (caso di un piano tangente), o può essere vuota. Osserviamo che è impossibile descrivere una circonferenza in $\mathbf{R}^3$ tramite una sola equazione di grado 2.

Esempio 5.11. Dati un piano π ed una sfera S in $\mathbf{R}^3$, come calcolare il *raggio* della circonferenza $\pi\cap S$? Basterà calcolare la distanza d fra il centro $\mathbf{c}$ della sfera ed il piano π e poi applicare il Teorema di Pitagora come nella Figura 16.



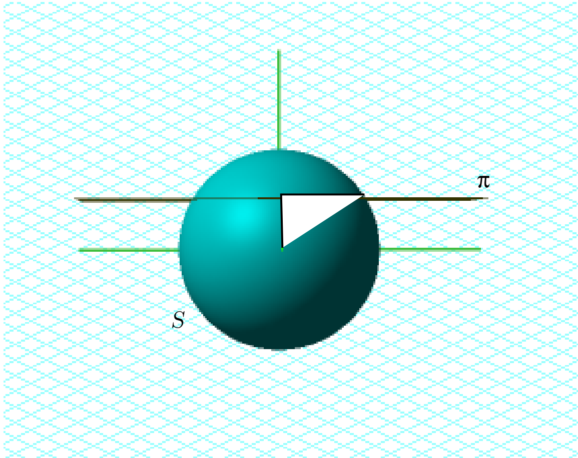


Fig.16. Il raggio della circonferenza $\pi \cap S$.

Per esempio, consideriamo π il piano di equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 1$ e la sfera S di equazione $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 = 5$. La distanza d fra il centro della sfera $\mathbf{c}$ ed il piano π è

$$d = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Il raggio della sfera è uguala a $\sqrt{5}$. Il raggio r della circonferenza $\pi \cap S$ soddisfa

$$r^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = (\sqrt{5})^2,$$

da cui si ricava $r = \sqrt{11/3}$.

Esercizi.

(5.A) Sia $\mathbf{x}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Trovare altri tre punti sulla retta r passante per $\mathbf{0}$ ed $\mathbf{x}$.

(5.B) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ due vettori in $\mathbf{R}^3$.

(i) Calcolare il punto medio fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(ii) Trovare altri tre punti sul piano che passa per $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(iii) Trovare un'equazione parametrica della retta passante per $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$.

(5.C) Siano π e π' due piani in $\mathbf{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$2x_1 - 3x_2 + 1 = 0, \qquad 3x_1 + x_3 - 2 = 0.$$

(i) Trovare equazioni parametriche per π e π'.
(ii) Calcolare un'equazione parametrica per la retta intersezione $\pi \cap \pi'$.

(5.D) Siano π_1 e π_2 due piani in $\mathbf{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbf{R}$$

e

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare un'equazione cartesiana dell'intersezione $\pi_1 \cap \pi_2$.
(ii) Calcolare un'equazione parametrica dell'intersezione $\pi_1 \cap \pi_2$.

(5.E) Siano l e m le rette in $\mathbf{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare l'intersezione $l \cap m$.
(ii) Trovare una retta che incontra sia l che m.

(5.F) Sia π il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x_1 - 2x_3 = 3$.
(i) Trovare un vettore normale a π.
(ii) Trovare un altro vettore normale a π.
(iii) Calcolare un'equazione parametrica per π.
(iv) Calcolare un'altra equazione parametrica per π.

(5.G) Sia l la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Sia m la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare l'intersezione di l ed m.
(ii) Calcolare l'angolo fra l ed m.

(5.H) Sia π il piano di equazione $2x_1 + x_2 - x_3 + 3 = 0$. Sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare un'equazione cartesiana per il piano π_1 che passa per $\mathbf{p}$ ed è parallelo a π.
(ii) Calcolare un'equazione parametrica per la retta l che passa per $\mathbf{p}$ ed è ortogonale a π.
(iii) Trovare i punti di intersezione $\pi \cap l$ e $\pi_1 \cap l$.
(iv) Calcolare la distanza fra i due punti nella parte (iii).

(5.I) Sia $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia π il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare la proiezione ortogonale del punto $\mathbf{q}$ sul piano π
(ii) Calcolare la distanza fra $\mathbf{q}$ e π.

(5.J) Sia $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia π il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare la distanza fra $\mathbf{p}$ e π.
(ii) Calcolare la proiezione ortogonale di $\mathbf{p}$ su π.
(iii) Calcolare le coordinate del punto $\mathbf{q}$ simmetrico di $\mathbf{p}$ rispetto a π.

(5.K) Sia S la sfera di equazione $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 + (x_3 + 2)^2 = 4$.
(i) Far vedere che $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ sta sulla sfera S. Trovare un altro punto sulla sfera.

(ii) Calcolare il piano π tangente ad S nel punto $\mathbf{p}$.
(iii) Calcolare il piano π' tangente ad S nel punto $\mathbf{q}$.

(5.L) Sia S la sfera di equazione $(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3+2)^2=4$. Sia π il piano di equazione $x_1+x_2+x_3=2$.
(i) Calcolare la distanza fra π e il centro di S.
(ii) Far vedere che l'intersezione $S\cap\pi$ è una circonferenza. Calcolarne il raggio.

(5.M) Sia $\mathbf{p}\in\mathbf{R}^3$ il punto di coordinate $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ e sia m la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad s\in\mathbf{R}.$$

(i) Calcolare un'equazione cartesiana del piano che passa per m e $\mathbf{p}$.
(ii) Calcolare un'equazione parametrica della retta l passante per $\mathbf{p}$ e perpendicolare ad m.
(iii) Calcolare il punto di intersezione $l\cap m$.
(iv) Calcolare la distanza fra $\mathbf{p}$ e la retta m.