Spazi vettoriali euclidei.

1. Prodotto scalare, lunghezza e ortogonalità in $\mathbf{R}^n$.

Consideriamo lo spazio vettoriale

$$\mathbf{R}^n = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\},$$

con la somma fra vettori e il prodotto di un vettore per uno scalare definiti rispettivamente da

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Definizione. (*Prodotto scalare.*) Dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^n$, il *prodotto scalare* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il numero reale

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

• Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà

(i) *(Proprietà commutativa)* Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x};$$

(ii) *(Proprietà distributiva)* Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z};$$

(iii) *(Omogeneità)* Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ ed ogni $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{y});$$

(iv) *(Positività)* Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0, \\ &\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \text{se e soltanto se} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dalle definizioni. Il punto *(i)* segue da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = y_1 x_1 + \ldots + y_n x_n = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

Il punto *(ii)* segue da

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= x_1(y_1 + z_1) + \ldots + x_n(y_n + z_n) = \\ &= x_1 y_1 + x_1 z_1 + \ldots + x_n y_n + x_n z_n = \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Confrontando le quantità

$$
\begin{aligned}
\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) &= \lambda(x_1y_1+\ldots+x_ny_n) = \lambda x_1y_1+\ldots+\lambda x_ny_n,\\
(\lambda\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} &= (\lambda x_1)y_1+\ldots+(\lambda x_n)y_n = \lambda x_1y_1+\ldots+\lambda x_ny_n,\\
\mathbf{x}\cdot(\lambda\mathbf{y}) &= x_1(\lambda y_1)+\ldots+x_n(\lambda y_n) = \lambda x_1y_1+\ldots+\lambda x_ny_n,
\end{aligned}
$$

otteniamo *(iii)*. Per dimostrare *(iv)*, osserviamo che

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = x_1^2+\ldots+x_n^2.$$

Poiché i quadrati di numeri reali sono sempre non negativi, si ha che $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\geq 0$. Se $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, chiaramente $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0$. Viceversa, se per un vettore $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ vale $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0$, allora $x_1^2+\ldots+x_n^2=0$. Ciò è possibile solo se $x_1=\ldots=x_n=0$.

Mediante il prodotto scalare definiamo in $\mathbf{R}^n$ nozioni di lunghezza, distanza, ortogonalità e angolo.

Definizione. La norma o lunghezza $\|\mathbf{x}\|$ di un vettore $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ è definita da

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}.$$

Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, questo fatto è precisamente l'enunciato del Teorema di Pitagora.

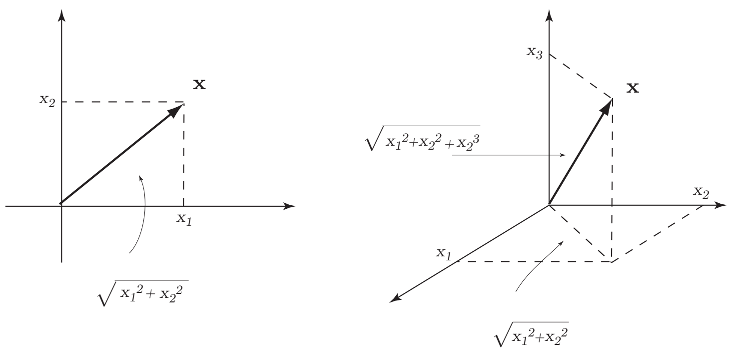

Fig.1. La norma di un vettore $\mathbf{x}$ in $\mathbf{R}^2$ e di un vettore $\mathbf{x}$ in $\mathbf{R}^3$

Definizione. La distanza fra i punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^n$ è definita da

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

In particolare, $\|\mathbf{x}\|$ coincide con la distanza di $\mathbf{x}$ dall'origine.

• La norma gode delle seguenti proprietà:

(i) *(Omogeneità)* $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$, per ogni $\lambda\in\mathbf{R}$.

(ii) *(Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)* $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\leq\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, per ogni $\mathbf{x},\ \mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$.

(iii) *(Disuguaglianza triangolare)* $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, per ogni $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.

Dimostrazione. Il punto (i) segue da

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \ldots + \lambda^2 x_n^2} = |\lambda|\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = |\lambda|\|\mathbf{x}\|.$$

(ii) Se $\mathbf{x} = 0$ oppure $\mathbf{y} = 0$ la disuguaglianza è chiaramente soddisfatta. Supponiamo adesso $\mathbf{x} \neq 0$ e $\mathbf{y} \neq 0$. Consideriamo un vettore della forma $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$, per $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Per le proprietà (i)(ii)(iii)(iv) del prodotto scalare, abbiamo che

$$\mathbf{z}\cdot\mathbf{z} = \alpha^2\|\mathbf{x}\|^2 + \beta^2\|\mathbf{y}\|^2 + 2\alpha\beta\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \geq 0, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

In particolare, per $\alpha = \|\mathbf{y}\|^2$ e $\beta = -\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, troviamo

$$\|\mathbf{y}\|^4\|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{y}\|^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 + \|\mathbf{y}\|^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 = \|\mathbf{y}\|^4\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \geq 0.$$

Dividendo per $\|\mathbf{y}\|^2 \neq 0$, otteniamo

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2$$

che è equivalente alla disuguaglianza cercata.
(iii) La disuguaglianza triangolare è equivalente alla disuguaglianza

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

Direttamente dalle definizioni e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2,$$

come richiesto.
Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, la disuguaglianza triangolare dice appunto che nel triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, la lunghezza del lato $\overline{\mathbf{0}(\mathbf{x}+\mathbf{y})}$ è minore o uguale alla somma delle lunghezze dei lati $\overline{\mathbf{0x}}$ e $\overline{\mathbf{x}(\mathbf{x}+\mathbf{y})}$.

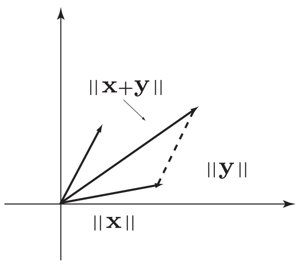

Fig.2. La disuguaglianza triangolare in $\mathbf{R}^2$.

Definizione. Due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ si dicono *ortogonali* se $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$. Questo si indica con $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

L'ortogonalità fra due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è anche caratterizzata dalla relazione

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, -\mathbf{y}).$$

Tale relazione è infatti equivalente a

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0.$$

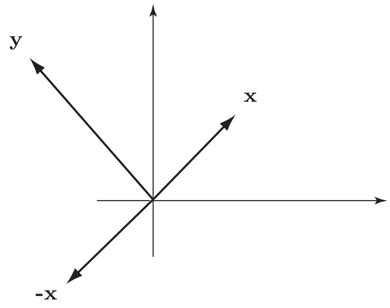

Fig.3. Ortogonalità fra vettori in $\mathbf{R}^2$.

• A partire dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz possiamo definire una nozione di angolo fra vettori non nulli in $\mathbf{R}^n$. Da essa segue infatti che dati $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$,

$$-1 \leq \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \leq 1,$$

per cui esiste un unico angolo $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}. \tag{1}$$

Definizione. Definiamo $\theta = \cos^{-1}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \in [0, \pi]$ come l'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

In particolare, due vettori non nulli $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ risultano ortogonali se e solo se l'angolo fra essi è $\theta = \pi/2$.

• Dall'equazione (1), otteniamo la seguente relazione fra il prodotto scalare fra due vettori e le loro norme

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta.$$

Osservazione. Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, la stessa relazione si può ottenere applicando la regola del coseno al triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, i cui lati hanno lunghezze $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. Ne segue che

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi.$$

Dalla definizione stessa della norma abbiamo $(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$ e quindi $-2x_1y_1 - 2x_2y_2 = -2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = -2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$ come richiesto.

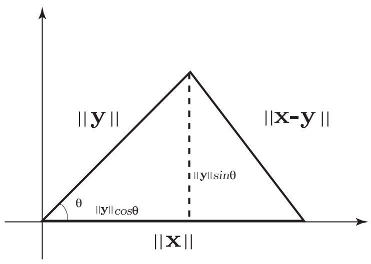

Fig.4. La regola del coseno.

• La *proiezione ortogonale* $\pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ di un vettore $\mathbf{x}$ su un vettore $\mathbf{y} \neq 0$ è un vettore $\pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) = c\mathbf{y}$ multiplo di $\mathbf{y}$ caratterizzato dalla proprietà

$$(\mathbf{x} - \pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{y} = 0.$$

In altre parole, la proiezione ortogonale di un vettore $\mathbf{x}$ su un vettore $\mathbf{y} \neq 0$ determina una scomposizione del vettore $\mathbf{x}$ nella somma di un vettore parallelo a $\mathbf{y}$ e un vettore ortogonale a $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{z} = \mathbf{x} - \pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} \perp \mathbf{y}. \tag{2}$$

Risulta

$$\pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| \cos\theta \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|\|\mathbf{y}\|}\mathbf{y}.$$

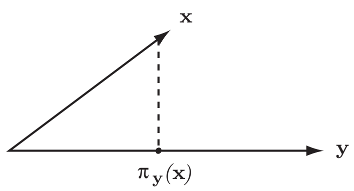

Fig.5. La proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{x}$ sul vettore $\mathbf{y}$.

2. Basi ortonormali. Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

Definizione. Un sottoinsieme $\{X_1, \dots, X_k\}$ di $\mathbf{R}^n$ si dice un insieme ortogonale se i suoi elementi sono a due a due ortogonali fra loro.

Esercizio. Gli elementi di un insieme ortogonale sono linearmente indipendenti.

Definizione. Una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ è una base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ i cui elementi hanno norma uno e sono a due a due ortogonali:

$$\|\mathbf{e}_1\| = \ldots = \|\mathbf{e}_n\| = 1, \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0,\ i \neq j.$$

Esempio. I vettori $\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\}$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$.

Esempio. I vettori $\{\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

Esempio. La base canonica di $\mathbf{R}^n$

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

è una base ortonormale.

Il metodo di *ortonormalizzazione di Gram-Schmidt* permette di ottenere una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ a partire da una base qualsiasi.

Sia $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base di $\mathbf{R}^n$. Allora i vettori

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 \\
\vdots &= \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\mathbf{u}_n &= \mathbf{v}_n - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \ldots - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_{n-1}}{\mathbf{u}_{n-1} \cdot \mathbf{u}_{n-1}}\mathbf{u}_{n-1}
\end{aligned}$$

sono a due a due ortogonali (cfr. equazione (2)). Inoltre, poiché per ogni $1 \leq j \leq n$,

$$span\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j\} = span\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j\}, \tag{3}$$

anche i vettori $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ formano una base di $\mathbf{R}^n$. Infine i vettori

$$\{\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \dots, \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{u}_n}{\|\mathbf{u}_n\|}\}$$

formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$.

Esempio. Sia data la base $\{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbf{R}^3$. Allora i vettori

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

formano una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$ e i vettori

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

Osservazione. Sia $U \subset \mathbf{R}^n$ il sottospazio generato dai primi k vettori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ della base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ di $\mathbf{R}^n$. Dalla relazione (3) segue che i vettori $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$, ottenuti nel corso del procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, sono una base ortogonale di U.

Esercizio. Dato un sottospazio U in $\mathbf{R}^n$ di dimensione k, esiste una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

con la proprietà che $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ è una base ortonormale di U e $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ è una base ortonormale di $U^\perp$. In altre parole, data una base ortonormale di U, essa può essere completata ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$.

• Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base *ortogonale* di $\mathbf{R}^n$ e sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Allora le coordinate di $\mathbf{x}$ in $\mathcal{B}$ sono date da

$$x_1 = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}, \ldots, x_n = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_n}{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n}.$$

In particolare, se la base $\mathcal{B}$ è *ortonormale*, le coordinate di $\mathbf{x}$ in $\mathcal{B}$ sono date da

$$x_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1, \ldots, x_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_n.$$

Dimostrazione. Il vettore $\mathbf{x}$ si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n.$$

Per $1 \leq j \leq n$,

$$\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_j \cdot x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_j \cdot x_n\mathbf{v}_n = x_j\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j,$$

da cui

$$x_j = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_j}{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j}.$$

3. Complementi ortogonali. Proiezioni ortogonali.

Sia U un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$.

Definizione. . Un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ si dice ortogonale a U se è ortogonale a tutti gli elementi di U. L'*ortogonale* $U^\perp$ di U è per definizione

$$U^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0, \ \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

Proposizione. *$U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in U^\perp$, $\lambda \in \mathbf{R}$ e sia $\mathbf{u}$ un arbitrario elemento di U. Dalle proprietà del prodotto scalare e dalle ipotesi segue che

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} = 0 + 0 = 0, \qquad (\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \lambda 0 = 0.$$

In altre parole, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in U^\perp$ e $\lambda\mathbf{x} \in U^\perp$, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, come richiesto.

Esempio.

(i) Sia $U = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$. Allora $U^\perp = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 + 3x_2 = 0\}$ è la retta per l'origine ortogonale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(ii) Sia $U = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$. Allora $U^\perp = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\}$ è il piano per l'origine ortogonale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(iii) Sia $U = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$. Allora $U^\perp = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}\}$ è la retta per l'origine parallela a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

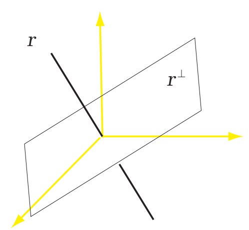

Fig.6. Il complemento ortogonale ad una retta in $\mathbf{R}^3$.

• Se U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$ di dimensione k e $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ è una base di U, allora

$$U^\perp = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0 \end{cases} \right\}.$$

In questo caso, $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di dimensione $n - k$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} \in U^\perp$. Segue immediatamente dalla definizione che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = \ldots = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0$. Viceversa, supponiamo che $\mathbf{x}$ soddisfi il sistema $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = \ldots = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0$. Poiché un arbitrario elemento di U si scrive come $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{u}_k$, si ha

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0.$$

In altre parole, $\mathbf{x} \in U^\perp$. Questa caratterizzazione esprime $U^\perp$ come lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di k equazioni indipendenti. Di conseguenza, $U^\perp$ ha dimensione $n - k$.

Esercizio. Verificare che $U \cap U^\perp = \{O\}$.

• Se U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$, il sottospazio $U^\perp$ si chiama complemento ortogonale di U. Lo spazio $\mathbf{R}^n$ si decompone infatti come somma diretta di U e $U^\perp$

$$\mathbf{R}^n = U \oplus U^\perp \qquad U \cap U^\perp = \{O\}.$$

In particolare, ogni elemento $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ si scrive *in modo unico* come somma di un elemento in U e un elemento in $U^\perp$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_U + \mathbf{x}_{U^\perp}, \qquad \mathbf{x}_U \in U, \quad \mathbf{x}_{U^\perp} \in U^\perp, \qquad \text{e vale} \qquad \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_U\|^2 + \|\mathbf{x}_{U^\perp}\|^2.$$

Definizione. Per definizione i vettori $\mathbf{x}_U$ e $\mathbf{x}_{U^\perp}$ sono rispettivamente le proiezioni ortogonali di $\mathbf{x}$ su U e su $U^\perp$

$$\mathbf{x}_U = \pi_U(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}_{U^\perp} = \pi_{U^\perp}(\mathbf{x}).$$

Calcolo della proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio.

Proposizione. *Sia U un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ e sia $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una qualunque base ortogonale di U. Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ un vettore. Allora la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su U è data da*

$$\mathbf{x}_U = \pi_U(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \ldots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k.$$

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortogonale di $\mathbf{R}^n$ che completa $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. In particolare, $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ è una base ortogonale di $U^\perp$. In questa base,

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \ldots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_{k+1}}{\mathbf{u}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_{k+1}} \mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_n}{\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n} \mathbf{u}_n.$$

Per l'unicità di $\mathbf{x}_U$ e di $\mathbf{x}_{U^\perp}$, segue che

$$\mathbf{x}_U = \pi_U(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \ldots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k$$

e analogamente

$$\mathbf{x}_{U^\perp} = \pi_{U^\perp}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_{k+1}}{\mathbf{u}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_{k+1}} \mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_n}{\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n} \mathbf{u}_n.$$

Osservazione. L'applicazione
$$\pi_U \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto \pi_U(\mathbf{x}),$$
che ad un vettore associa la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U, è un'applicazione lineare. Vale infatti
$$\pi_U(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\pi_U(\mathbf{x}) + \beta\pi_U(\mathbf{y}), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n.$$
Inoltre, la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su U è data dalla somma delle proiezioni di $\mathbf{x}$ sui singoli vettori *ortogonali* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$.

Esercizio. Sia $\mathbf{x}$ un vettore in $\mathbf{R}^3$. La proiezione ortogonale $\pi(\mathbf{x})$ di $\mathbf{x}$ sul piano β passante per l'origine di equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ è data da
$$\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda\mathbf{n}, \quad \text{ove } \lambda = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Sol. Sia $\pi(\mathbf{x})$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ sul piano β. Allora $\mathbf{x} - \pi(\mathbf{x})$ è un vettore perpendicolare a β e dunque soddisfa
$$\mathbf{x} - \pi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{n}$$
per un opportuno scalare λ. Poiché $\pi(\mathbf{x})$ appartiene a β vale $\mathbf{n} \cdot \pi(\mathbf{x}) = 0$, da cui si ricava $\lambda\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ e quindi
$$\lambda = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}$$
come richiesto.

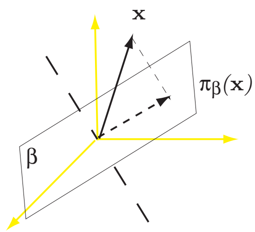

Fig.7. La proiezione del vettore $\mathbf{x}$ sul piano β.

La proiezione ortogonale di un vettore $\mathbf{x}$ su un sottospazio U è il punto di U più vicino ad $\mathbf{x}$.

Proposizione. *Sia U un sottospazio di $\mathbf{R}^n$, sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ e sia $\mathbf{x}_U$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su U. Allora, per ogni $\mathbf{u} \in U$*
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_U) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{u} \in U$ un elemento arbitrario. L'identità
$$\mathbf{x} - \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_U + \mathbf{x}_U - \mathbf{u}, \qquad \text{con} \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_U \in U, \quad \mathbf{x}_U - \mathbf{u} \in U^{\perp}$$

scompone di $\mathbf{x}-\mathbf{u}$ come somma di due vettori ortogonali. In particolare implica

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_U\|^2 + \|\mathbf{x}_U-\mathbf{u}\|^2$$

e

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_U\|^2 \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{u}\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_U\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{u}\|$$

come richiesto.

Definizione. La distanza di un vettore $\mathbf{x}$ da un sottospazio U è per definizione la distanza fra $\mathbf{x}$ e la sua proiezione ortogonale su U

$$d(\mathbf{x},U) = d(\mathbf{x},\mathbf{x}_U).$$

In particolare, se $\mathbf{x}\in U$, allora $\mathbf{x}_U=\mathbf{x}$ e $d(\mathbf{x},U)=0$.

4. Un'applicazione: il metodo dei minimi quadrati.

I sistemi lineari che si incontrano nelle applicazioni pratiche dell'algebra lineare spesso sono incompatibili e non hanno soluzioni. Il metodo dei *minimi quadrati* è un procedimento per trovare " il miglior sostituto" alle soluzioni di un sistema lineare incompatibile e si basa sul fatto che la proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio è il punto del sottospazio ad esso più vicino.

Esempio Supponiamo che, secondo una certa teoria, esista un rapporto di tipo lineare fra due quantità fisiche X e Y:

$$Y = \lambda X + \mu$$

per certe costanti λ e μ che dipendono dalla situazione. Effettuando varie misurazioni delle quantità X e Y, si cerca di risalire alle costanti λ e μ. Nella figura, ogni punto rappresenta i dati di un esperimento. Per esempio il punto $P_1=(3,1)$ corrisponde ad un esperimento i cui risultati erano $X=3$ e $Y=1$.

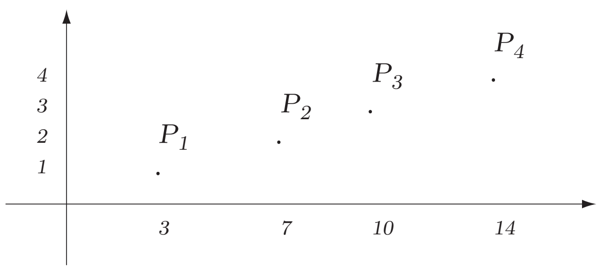

Fig.8. I dati.

Si verifica facilmente che non esiste una retta $y=\lambda x+\mu$ passante per tutti i punti P_i. In altre parole, il sistema lineare

$$\begin{cases} 1 &= & 3\lambda &+& \mu \\ 2 &= & 7\lambda &+& \mu \\ 3 &= & 10\lambda &+& \mu \\ 4 &= & 14\lambda &+& \mu \end{cases}$$

non ha soluzioni λ, μ. Con il metodo dei minimi quadrati si trovano dei valori λ_0 e μ_0 che, in un certo senso, sono ottimali rispetto ai dati trovati. La retta corrispondente $y = \lambda_0 x + \mu_0$, pur non passando per i punti P_i, sarà quella che si avvicina di più ad essi.

Il metodo. Sia

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Scriviamo questo sistema come $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Il sistema ha soluzioni se e soltanto se il vettore $\mathbf{b}$ è contenuto nell'immagine della applicazione $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ data dalla moltiplicazione per la matrice A. Se il sistema *non* ha soluzioni, possiamo cercare un vettore $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$ tale che $A\mathbf{x_0}$ sia più vicino possibile al vettore $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$:

$$\|A\mathbf{x_0} - \mathbf{b}\| \leq \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Il punto nell'immagine di A che è più vicino a $\mathbf{b}$ è la proiezione ortogonale $\mathbf{b'}$ di $\mathbf{b}$ sullo spazio $\mathrm{Im}(A)$. È ragionevole considerare una soluzione $\mathbf{x_0}$ del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b'}$ come una buona "soluzione approssimativa" del sistema originale. Il Teorema 1 ci dice come trovare $\mathbf{x_0}$ *senza calcolare* la proiezione $\mathbf{b'}$.

Teorema 1. *Le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b'}$ coincidono con le soluzioni del sistema di n equazioni in n incognite*

$${}^tA \cdot A\mathbf{x} = {}^tA\mathbf{b}.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x_0}$ una soluzione del sistema ${}^tA \cdot A\mathbf{x} = {}^tA\mathbf{b}$. Equivalentemente ${}^tA \cdot (A\mathbf{x_0} - \mathbf{b}) = 0$. Questo vuol dire che il vettore $A\mathbf{x_0} - \mathbf{b}$ è perpendicolare ad ogni riga della matrice ${}^tA$ e quindi ad ogni colonna della matrice A. Siccome $\mathrm{Im}(A)$ è lo span delle colonne di A, questo significa che $A\mathbf{x_0} - \mathbf{b}$ è ortogonale all'immagine della matrice A. L'unico vettore $\mathbf{b'}$ in $\mathbf{R}^m$ con la proprietà che $\mathbf{b'} - \mathbf{b}$ è perpendicolare a $\mathrm{Im}(A)$ è la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{b}$ sull'immagine di A. Di conseguenza, $A\mathbf{x_0} = \mathbf{b'}$ e le soluzioni del sistema ${}^tA \cdot A\mathbf{x} = {}^tA\mathbf{b}$ sono anche soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b'}$. Il viceversa è immediato.

I sistemi lineari che si considerano in molte applicazioni pratiche sono incompatibili perche' sovradeterminati, ossia perche' hanno "più equazioni che incognite". Precisamente, sono del tipo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$\mathrm{rango}(A) \text{ massimo}, \qquad \mathrm{rango}(A) < \mathrm{rango}(A|\mathbf{b}).$$

Il Teorema 2, dice che per tali sistemi esiste un'unica soluzione $\mathbf{x_0}$ del sistema ${}^tA \cdot A\mathbf{x} = {}^tA\mathbf{b}$, che rappresenta la miglior "soluzione approssimativa" del sistema originale.

Teorema 2. *Il sistema ${}^tA \cdot A\mathbf{x} = {}^tA\mathbf{b}$ ha un'unica soluzione se e solo se le colonne della matrice A sono linearmente indipendenti.*

Come applicazione, cerchiamo una "soluzione approssimativa" $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ dell'esempio sopra. Il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \\ 10 & 1 \\ 14 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

risulta incompatibile e soddisfa le ipotesi del Teorema 2. Calcoliamo ${}^tA \cdot A$ e ${}^tA\mathbf{b}$.

$$
{}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \\ 10 & 1 \\ 14 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 344 & 34 \\ 34 & 4 \end{pmatrix},
$$

$$
{}^tA\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103 \\ 10 \end{pmatrix}.
$$

Il sistema ${}^tAA\mathbf{x} = {}^tA\mathbf{b'}$ è

$$
\begin{pmatrix} 344 & 34 \\ 34 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103 \\ 10 \end{pmatrix}.
$$

Questo sistema ha un'unica soluzione $\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}$ data da

$$
\lambda' = \frac{103 \cdot 4 - 10 \cdot 34}{344 \cdot 4 - 34 \cdot 34} = \frac{18}{55} \approx 0.327, \qquad \mu' = \frac{344 \cdot 10 - 34 \cdot 103}{344 \cdot 4 - 34 \cdot 34} = -\frac{31}{110} \approx -0.282.
$$

L'equazione della retta che passa più vicina ai punti P_i è quindi $Y = 0.327X - 0.282$. Per curiosità calcoliamo $\mathbf{b'} = A \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}$ e controlliamo che la soluzione è effettivamente buona. Questo vuol dire che il vettore $\mathbf{b'}$ è "vicino" al vettore dei termini noti $\mathbf{b}$. Troviamo

$$
A \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \\ 10 & 1 \\ 14 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.327 \\ -0.282 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 2.01 \\ 2.99 \\ 4.3 \end{pmatrix}
$$

Infatti, gli errori sono relativamente piccoli: 0.3, 0.01, 0.01 e 0.3.

5. Il prodotto vettoriale in $\mathbf{R}^3$.

Introduciamo adesso il *prodotto vettoriale* in $\mathbf{R}^3$ che ad una coppia di vettori $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ associa un terzo vettore $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$, ortogonale ai primi due. Si noti che il *prodotto vettoriale* non è definito nel piano $\mathbf{R}^2$, né in $\mathbf{R}^n$ per $n > 3$. È una nozione che *esiste solo in* $\mathbf{R}^3$.

Definizione. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$. Il *prodotto vettoriale* $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il vettore di $\mathbf{R}^3$ definito da

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione. *Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$. Il prodotto vettoriale $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ gode delle seguenti proprietà:*

(i)

$$\mathbf{y} \times \mathbf{x} = -\mathbf{x} \times \mathbf{y};$$

(ii) Il vettore $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ è perpendicolare sia ad $\mathbf{x}$ che a $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0,$$
$$\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0;$$

(iii) La norma di $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ soddisfa

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\||\operatorname{sen}\varphi|,$$

dove φ è l'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Dimostrazione. *(i)* Direttamente dalla definizione, abbiamo

$$\mathbf{y} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_2x_3 - y_3x_2 \\ y_3x_1 - y_1x_3 \\ y_1x_2 - y_2x_1 \end{pmatrix} = -\mathbf{x} \times \mathbf{y}.$$

Per dimostrare *(ii)*, calcoliamo

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Similmente troviamo $\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$.
Per la parte *(iii)* abbiamo

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 \operatorname{sen}^2\varphi &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2(1 - \cos^2\varphi) \\
&= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \\
&= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\
&= x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_3y_1y_3 - 2x_2x_3y_2y_3 \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2 \\
&= \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2.
\end{aligned}$$

Estraendo le radici quadrate, troviamo l'uguaglianza cercata. Questo conclude la dimostrazione della proposizione.

6. Volumi.

In questo paragrafo, richiamiamo un'importante interpretazione geometrica del determinante di una matrice quadrata. Ci limitiamo a dimostrarla nei casi 2×2 e 3×3.

Proposizione. *L'area del parallelogramma di vertici di vertici* $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *e* $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ *in* $\mathbf{R}^2$ *è data da*

$$|x_1y_2 - x_2y_1| = |\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}|.$$

Dimostrazione. Sia A l'area del parallelogramma in questione. Poiché l'altezza del parallelogramma è uguale a $\|\mathbf{y}\| \operatorname{sen} \varphi$, l'area risulta

$$A = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \operatorname{sen} \varphi.$$

Allora

$$\begin{aligned} A^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 - (\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \varphi)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_1 + x_2y_2)^2 \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)^2. \end{aligned}$$

Estraendo le radici quadrate troviamo

$$A = |x_1y_2 - x_2y_1|$$

come richiesto.

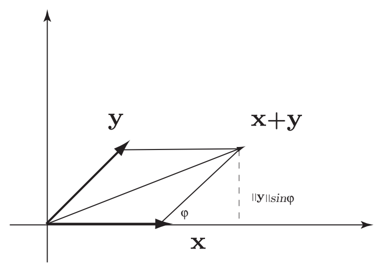

Fig.9. Il paralellogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y}$.

Corollario. L'area del parallogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ è uguale al modulo del prodotto vettoriale $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Inoltre, dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, l'*area del triangolo* di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ risulta uguale a $\frac{1}{2}|\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}|$.

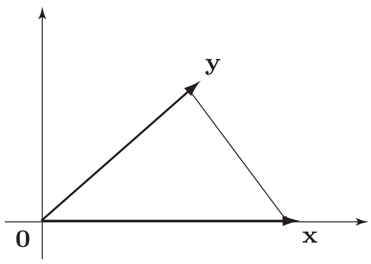

Fig.10. Il triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Proposizione. *Il parallelepipedo di spigoli i vettori* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *e* $\mathbf{z}$ *in* $\mathbf{R}^3$ *ha volume* V *uguale a*

$$\begin{aligned} V &= |x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3 - z_1y_2x_3| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right| . \end{aligned}$$

Dimostrazione. Il volume V del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ è uguale all'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ moltiplicata per l'altezza. L'altezza è uguale alla lunghezza della proiezione del vettore $\mathbf{z}$ sulla retta che passa per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$.

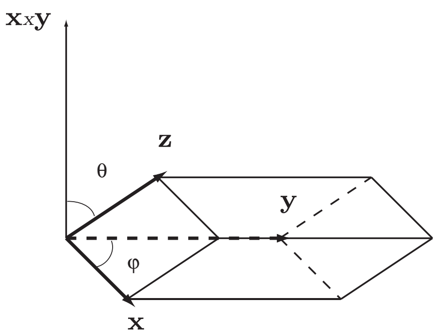

Fig.11. Il parallelepipedo di spigoli $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

Per la proposizione precedente, l'area del parallelogramma è uguale a $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\||\operatorname{sen}\varphi|$, ove φ è l'angolo fra i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, e la lunghezza della proiezione di $\mathbf{z}$ sulla retta per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ è uguale a $\|\mathbf{z}\||\cos\vartheta|$, ove ϑ è l'angolo fra i vettori $\mathbf{z}$ e $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$. Il volume V è quindi dato da

$$\begin{aligned} V &= \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\||\operatorname{sen}\varphi|\|\mathbf{z}\||\cos\vartheta| \\ &= \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|\|\mathbf{z}\||\cos\vartheta| \\ &= \|\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})\| \\ &= |z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)|. \end{aligned}$$

Osserviamo infine che l'espressione $z_1(x_2y_3-x_3y_2)+z_2(x_3y_1-x_1y_3)+z_3(x_1y_2-x_2y_1)$ coincide col determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix},$$

e ciò completa la dimostrazione della proposizione.