Trasformazioni geometriche del piano e dello spazio.

1. Generalità.

Una trasformazione di $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione *bigettiva* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Le trasformazioni si possono *comporre* tra loro: se f e g sono due applicazioni bigettive da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^n$, allora la composizione $f \circ g$, definita da

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})),$$

è ancora un'applicazione bigettiva da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$. Nota bene che $f \circ g$ si legge "f *composto* g", a indicare che prima si applica g al vettore $\mathbf{x}$ e poi si applica f al vettore $g(\mathbf{x})$. In generale, $f \circ g$ è diversa dall'applicazione $g \circ f$.
La composizione fra applicazioni gode della *proprietà associativa:*

$$(f \circ (g \circ h))(\mathbf{x}) = f(g(h(\mathbf{x}))) = ((f \circ g) \circ h)(\mathbf{x}).$$

Un'applicazione bigettiva f è invertibile. L'*inversa* $f^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ soddisfa $f^{-1}(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, per ogni $\mathbf{x}$ nel dominio di f e soddisfa $f(f^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$, per ogni $\mathbf{y}$ nel codominio di f.

Abbiamo visto alcune trasformazioni del piano $\mathbb{R}^2$ e dello spazio $\mathbb{R}^3$ di particolare significato geometrico. Dimostriamo adesso alcuni fatti generali sulle isometrie.

2. Isometrie e affinità.

Consideriamo $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico e la distanza indotta.

Definizione. Un'applicazione $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'isometria se conserva la distanza

$$d(F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Questo equivale a: $\quad \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$

Osservazione.

• Un'isometria è necessariamente iniettiva:
Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tali che $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y})$. Questo equivale a $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = 0$. D'altra parte $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ implica $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0$, da cui $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
Un'isometria è anche suriettiva e dunque bigettiva (cf. Corollario A). Dunque un'isometria è una trasformazione di $\mathbb{R}^n$.

• La composizione $f \circ g$ di due isometrie di $\mathbb{R}^n$ è ancora un'isometria:
infatti conserva le distanze

$$d((f \circ g)(\mathbf{x}), (f \circ g)(\mathbf{y})) = d(f(g(\mathbf{x})), f(g(\mathbf{y}))) = d(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

• L'inversa di un'isometria è un'isometria: infatti soddisfa

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(f^{-1}(f(\mathbf{x})), f^{-1}(f(\mathbf{y}))).$$

Esempio. Le traslazioni

$$T_{\mathbf{p}}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}+\mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$$

($\mathbf{p}$ è il *passo* della traslazione $T_{\mathbf{p}}$) sono isometrie. Infatti

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{p}-(\mathbf{y}+\mathbf{p})| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|, \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

L'inversa di una traslazione di passo $\mathbf{p}$ è una traslazione di passo $-\mathbf{p}$

$$T_{\mathbf{p}}^{-1} = T_{-\mathbf{p}}.$$

Lemma 2.1. *Sia* $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *un'isometria con* $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. *Allora*
(i) F *conserva la norma:* $\|F(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$, *per ogni* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
(ii) F *conserva il prodotto scalare:* $F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, *per ogni* $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. (i) Poiché $\|F(\mathbf{x})-F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, per ogni $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, in particolare per $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ vale $\|F(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$.
(ii) Dalla relazione $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$, otteniamo $\|F(\mathbf{x})\|^2 + \|F(\mathbf{y})\|^2 - 2F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Per l'invarianza della norma, segue che $F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Proposizione 2.2. *Sia* $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *un'isometria. Allora* F *è lineare (data dalla moltiplicazione matrice-vettore) se e solo se* $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Dim. Se F è lineare, necessariamente $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Viceversa, supponiamo che $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Dobbiamo dimostrare che $F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = F(\mathbf{x})+F(\mathbf{y})$ e che $F(\lambda\mathbf{x}) = \lambda F(\mathbf{x})$, per ogni $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Poiché F conserva la norma ed il prodotto scalare, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\|F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\|^2 =& \|F(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2 + \|F(\mathbf{x})\|^2 + \|F(\mathbf{y})\|^2 \\
&+ 2F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) - 2F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - 2F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot F(\mathbf{y}) \\
=& \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&+ 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) - 2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \\
=& (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) - 2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \\
=& \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Allo stesso modo

$$\|F(\lambda\mathbf{x}) - \lambda F(\mathbf{x})|^2 = \|F(\lambda\mathbf{x})\|^2 + \|\lambda F(\mathbf{x})\|^2 - 2\lambda\|F(\lambda\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{x})\|^2 = \ldots = 0,$$

e la tesi è dimostrata.

Osservazione 2.3. Sia $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'isometria lineare (data dalla moltiplicazione matrice-vettore). Ricordiamo che un'applicazione lineare iniettiva di $\mathbb{R}^n$ in sè è necessariamente bigettiva. Inoltre, per il lemma precedente manda basi ortonormali in basi ortonormali. Se M è la matrice rappresentativa di F (nella base canonica in dominio e codominio), le colonne di M formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Una matrice con questa proprietà si chiama *matrice ortogonale*. Algebricamente è caratterizzata dalla condizione ${}^tM \cdot M = Id$.

Esercizio 2.4. Sia M una matrice ortogonale.
(i) Far vedere che M^{-1} e ${}^tM$ sono matrici ortogonali.
(ii) Far vedere che $\det M = \pm 1$.
(iii) Far vedere che se λ è una autovalore reale di M, allora $\lambda = \pm 1$.
(iv) Far vedere che se $V \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio e $MV = V$, allora anche $MV^\perp = V^\perp$.

Esercizio 2.5.
(i) Far vedere che il prodotto di due matrici ortogonali è una matrice ortogonale.
(ii) Far vedere che

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

sono matrici ortogonali, per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$.

Corollario 2.6. *Le isometrie di* $\mathbb{R}^n$ *sono tutte e sole le applicazioni della forma*

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

dove M *è una matrice ortogonale* e $\mathbf{b}$ *è un vettore in* $\mathbb{R}^n$*. In altre parole, tutte le isometrie di* $\mathbb{R}^n$ *si ottengono dalla composizione di una traslazione con una isometria lineare.*

Dimostrazione. Sia F un'isometria e sia $F(\mathbf{0}) = \mathbf{b}$. La composizione $T_{-\mathbf{b}} \circ F$ è un'isometria che manda l'origine in sè

$$T_{-\mathbf{b}} \circ F(\mathbf{0}) = T_{-\mathbf{b}}(F(\mathbf{0})) = T_{-\mathbf{b}}(\mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Per la proposizione, $T_{-\mathbf{b}} \circ F$ è un'isometria lineare, per cui esiste una matrice ortogonale M tale che

$$T_{-\mathbf{b}} \circ F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Di conseguenza

$$F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

come richiesto.

Definizione. Una trasformazione lineare affine di $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione della forma

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

dove M è una matrice *invertibile* e $\mathbf{b}$ è un vettore in $\mathbb{R}^n$.

Per il Corollario 2.6, le isometrie di $\mathbb{R}^n$ sono *particolari* trasformazioni lineari affini, dette anche *trasformazioni rigide*. In generale, le trasformazioni lineari affini non conservano distanze, angoli, né volumi.

Queste trasformazioni hanno comunque diverse proprietà in comune con le trasformazioni lineari. Tutte le trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ mandano rette in rette, piani in piani,..., sottospazi affini in sottospazi affini (i sottospazi affini sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ o traslati di sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$). Rispettano parallelismo e incidenza: mandano rette parallele in rette parallele, rette incidenti in rette incidenti, piani paralleli in piani paralleli, etc... Poiché lo stesso vale per le traslazioni, vale anche per tutte le trasformazioni lineari affini del piano, che sono composizioni di traslazioni e di trasformazioni lineari.

Esempio. Sia r è una retta in $\mathbb{R}^n$ di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se M è la matrice rappresentativa di una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^n$, la retta immagine di r tramite M ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, se π è un piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

il piano immagine di π tramite M ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v} + sM\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Infine, se $T_{\mathbf{q}}$ è una traslazione di passo $\mathbf{q}$ in $\mathbb{R}^n$, l'immagine di r tramite $T_{\mathbf{q}}$ ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R};$$

l'immagine di π tramite $T_{\mathbf{q}}$ ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$