1. Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$X \mapsto AX, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare e disegnare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

(ii) Cosa fa geometricamente F?

(iii) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\}$.

2. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$X \mapsto AX, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare e disegnare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

(ii) Cosa fa geometricamente F?

(iii) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Confrontare le dimensioni $\dim U$ e $\dim F(U)$.

(iv) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\}$. Confrontare le dimensioni $\dim U$ e $\dim F(U)$.

(v) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Confrontare le dimensioni $\dim U$ e $\dim F(U)$.

(v) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Confrontare le dimensioni $\dim U$ e $\dim F(U)$.

3. Usando la definizione, determinare quali applicazioni A sono lineari. Scrivere le applicazioni lineari nella forma "moltiplicazione matrice-vettore".

(i) $A : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ data da $A(x) = |x|$;

(ii) $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ data da

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix};$$

(iii) $A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + 2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix};$$

(iv) $A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \end{pmatrix};$$

(v) $A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ data da

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4^2 \end{pmatrix}.$$

4. Sia M una matrice $m \times n$. Indichiamo con $F_M : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ l'applicazione data dalla moltiplicazione matrice-vettore $F_M(X) = MX$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

   (i) Calcolare l'applicazione composta $F_A \circ F_B$ dove $F_B : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ e $F_A : \mathbf{R}^3 :\longrightarrow \mathbf{R}^2$ sono individuate dalle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $\quad F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}), \quad F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}).$

   (ii) Calcolare le composizioni $F_A \circ F_B$ e $F_B \circ F_A$ dove $F_B : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^4$ e $F_A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}$ sono individuate dalle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $\quad F_A \circ F_B(4), \quad F_A \circ F_B(0), \quad F_A \circ F_B(11).$

Calcolare $\quad F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}), \quad F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}).$

   (iii) Calcolare le composizioni $F_A \circ F_B$ e $F_B \circ F_A$, dove $F_A,\ F_B : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ sono individuate dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Calcolare la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine delle applicazioni lineari:

(i) $L_A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

(ii) $L_A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(iv) $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

6. Siano $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

e $G : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare individuata dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare $\ker(F)$, $\ker(G)$, $\mathrm{im}(F)$ e $\mathrm{im}(G)$.
(ii) Calcolare la matrice associata a F e a $G \circ F$.
(iii) Calcolare $\ker(G \circ F)$ e $\mathrm{im}(G \circ F)$.

7. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$X \mapsto AX, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$ tale che $\dim U = \dim F(U)$.
(ii) Determinare un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$ tale che $\dim U > \dim F(U)$.
(iii) Dimostrare che in generale, data un'applicazione lineare $F\colon V \to W$, non esiste nessun sottospazio $U \subset V$ tale che $\dim U < \dim F(U)$.