1. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$V = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\}, \qquad W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}\}.$$

   (i) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
   (ii) Calcolare $\dim V$, $\dim W$ e $\dim V \cap W$.
   (iii) Calcolare $\dim(V + W)$.

2. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$V = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \qquad W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_3 = 0\}.$$

(i) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
(ii) Calcolare le dimensioni $\dim V$, $\dim W$ e $\dim V \cap W$.
(iii) Calcolare $\dim(V + W)$.

3. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$U = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\}, \quad W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}\}.$$

   (i) È vero che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$?
   (ii) Determinare sottospazi Z e V di $\mathbb{R}^3$ tali che

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus Z, \qquad \mathbb{R}^3 = W \oplus V.$$

4. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \qquad V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 & -x_2 & = 0 \\ -x_1 & +2x_2 & = 0 \end{cases}\}.$$

   (i) Calcolare $U + V$ e $\dim(U + V)$.
   (ii) Calcolare $\dim U$, $\dim V$, e $\dim(U \cap V)$.

5. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;$$

(i) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
(ii) Completarli ad una base di $\mathbb{R}^3$ in tre modi diversi.
(iii) Esibire un complemento per ognuno dei sottospazi: $span\{\mathbf{v}_1\}$, $span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e $span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$.

6. Determinare due sottospazi U e W di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathbb{R}^4 = U + W$, senza che la somma sia diretta.