

1. Determinare quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di \mathbf{R}^3 , giustificando le risposte:

$$(i) U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \right\}.$$

$$(ii) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y + z = 1 \right\}.$$

$$(iii) W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 - y = 0 \right\}.$$

2. Scrivere i seguenti sottospazi come $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$, per opportuni vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$.

$$(i) W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\} \subset \mathbf{R}^5;$$

$$(ii) W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + 2x_3 = 0 \right\} \subset \mathbf{R}^4;$$

$$(iii) W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right\} \subset \mathbf{R}^3.$$

3. Trovare equazioni cartesiane per i seguenti sottospazi di \mathbf{R}^2 :

$$(i) U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\};$$

$$(ii) V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\};$$

4. Dati i sottospazi di \mathbf{R}^3

$$W_1 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad W_2 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

decidere se $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$ oppure nessuna delle due.

5. Dati i sottospazi di \mathbf{R}^3

$$W_1 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad W_2 = \{x_1 - x_2 - x_3 = 0\},$$

decidere se $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$ oppure nessuna delle due.