

1. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolare e disegnare i seguenti vettori:

$$A + B, \quad A - B, \quad A + B + C, \quad 2A + B - 3C, \quad tA + (1-t)B, \quad t \in [0, 1], \quad A + tC, \quad t \in [0, 1].$$

2. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolare e disegnare i seguenti vettori:

$$A + B, \quad A - C, \quad A + B + C, \quad 2A + B - 3C, \quad tA + (1-t)B, \quad t \in [0, 1], \quad A + tD, \quad t \in [0, 1].$$

3. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di \mathbf{R}^2 :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2x_2 \right\} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2 \right\};$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0 \right\} \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - 3x_2 = 1 \right\};$$

- (ii) Dati $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, aiutandosi anche con il disegno, verificare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$$X \in A, \quad 2X \in A, \quad O \in A, \quad X \in B, \quad 3X \in B, \quad O \in B, \quad X \in D,$$

$$Y \in D, \quad O \in D, \quad 2Y \in D, \quad -Y \in D, \quad X \in C, \quad Y \in C, \quad X + Y \in C, \quad -X \in C$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in A, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in C.$$

- (iii) Decidere se A, B, C, D sono sottospazi vettoriali di \mathbf{R}^2 .

5. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di \mathbf{R}^3 :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 = 0 \right\}, \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

6. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di \mathbf{R}^3

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} : 0 < t < 1 \right\}, \quad V = \{(0, 0, 0)\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \geq 0 \right\}.$$

- (ii) Dati $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, aiutandosi anche con il disegno, verificare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$$O \in U, \quad O \in V, \quad O \in W, \quad Y \in U, \quad \frac{1}{3}Y \in U, \quad 2Y \in V$$

$$X \in W, \quad Y \in W, \quad X + Y \in W, \quad -X \in W, \quad X - Y \in W$$

- (iii) Decidere se U, V, W sono o meno sottospazi vettoriali di \mathbf{R}^3 .