

1. Sia data l'applicazione lineare  $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $F(X) = A \cdot X$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Sia  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  la base canonica di  $\mathbf{R}^3$ . Far vedere che i vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_1, \end{aligned}$$

formano una base per  $\mathbf{R}^3$ .

- (ii) Calcolare la matrice di  $F$  rispetto alla base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  in dominio e codominio.

2. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vettori in  $\mathbf{R}^3$ .

- (i) Far vedere che  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  formano una base per  $\mathbf{R}^3$ .

Sia  $A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione che permuta i vettori  $\mathbf{v}_i$ .

$$A(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2, \quad A(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3, \quad A(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1.$$

- (ii) Calcolare la matrice di  $A$  rispetto alla base  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ .

- (iii) Calcolare la matrice di  $A$  rispetto alla base canonica di  $\mathbf{R}^3$ .

- (iv) Calcolare la matrice di  $A^3$  rispetto alla base canonica di  $\mathbf{R}^3$ .

3. Determinare la matrice del cambiamento di base  $C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$  e la matrice del cambiamento di base  $C_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ , dove  $\mathcal{C}$  è la base canonica e  $\mathcal{B}$  è data di volta in volta da

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Determinare la matrice del cambiamento di base  $C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$  e la matrice del cambiamento di base  $C_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ , dove  $\mathcal{C}$  è la base canonica e  $\mathcal{B}$  è data di volta in volta da

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

5. Sia

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

e sia  $A : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione data da  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

(i) Dimostrare che  $A(\mathbf{x}) \in V$  per ogni  $\mathbf{x} \in V$ .

Sia  $A|_V$  l'applicazione  $A$  ristretta a  $V$ .

(ii) Trovare una base per  $V$ .

(iii) Calcolare la matrice rappresentativa della applicazione  $A|_V$  rispetto a questa base.

6. Sia  $V \subset \mathbf{R}^4$  il sottospazio dato da

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \end{cases} \right\}$$

sia  $F : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$  l'applicazione lineare  $X \mapsto AX$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Dimostrare che se  $\mathbf{x} \in V$ , allora  $F(\mathbf{x}) \in V$ .

(ii) Determinare una base per  $V$  e calcolare la matrice rappresentativa dell'applicazione  $F$  ristretta a  $V$

$$F|_V : V \rightarrow V$$

rispetto a questa base.

(iii) Calcolare il nucleo e l'immagine della applicazione  $F|_V$ .

7. Sia  $A$  la matrice  $n \times n$  data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Sia  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  la base standard di  $\mathbf{R}^n$ . Far vedere che

$$A\mathbf{e}_1 = 0,$$

$$A\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1}, \quad \text{per ogni } i > 1.$$

(ii) Calcolare  $A^2$ .

(iii) Per ogni  $n > 0$  calcolare  $A^n$  e determinarne il nucleo e l'immagine.

8. Sia  $M(2, 2, \mathbf{R})$  lo spazio vettoriale delle matrici reali  $2 \times 2$ . Sia

$$F: M(2, 2, \mathbf{R}) \rightarrow M(2, 2, \mathbf{R}), \quad M \mapsto {}^t M$$

l'applicazione che associa ad una matrice la sua trasposta.

(i) Far vedere che  $F$  è lineare.

(ii) Scegliere una base in  $M(2, 2, \mathbf{R})$  e determinare la matrice rappresentativa di  $F$  rispetto a quella base in dominio e codominio.