1. Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare data da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice M tale che $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

2. Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare data da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_1 - x_2 \\ x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice M tale che $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

3. Sia data la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcolare il rango di M. Scrivere il sistema lineare omogeneo con matrice dei coefficienti M e determinare la dimensione dello spazio delle sue soluzioni (anche senza calcolarle). È vero che il sistema lineare non omogeneo $MX = b$ è compatibile per ogni vettore dei termini noti b? È vero che l'applicazione lineare $L_M\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4,\quad X \mapsto MX$ è suriettiva? (Spiegare bene le risposte).

4. Sia $L_M\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3,\quad X \mapsto MX$ un'applicazione lineare, dove M è una matrice 3×5. Sapendo che M ha rango 2, determinare la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine di L_M. Dire se L_M è suriettiva o iniettiva, spiegando bene le risposte.

5. Sia $L\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare data da

$$L(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare se il sottospazio $U = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^4$ è contenuto nel nucleo di L.
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di L, cioè la matrice M tale che $L(X) = MX$.
   (c) Determinare il rango di M.
   (d) È vero che $U = \ker L$? Spiegare.
   (e) Determinare l'immagine di L, esibendone una base.
   (f) Determinare l'immagine tramite L del sottospazio $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^4$. In base a quanto trovato determinare la dimensione di $\ker L \cap W$.

6. Sia M una matrice $n \times n$ le cui colonne sono un insieme di vettori ortonormali. Spiegare perché l'applicazione lineare $L_M\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ è iniettiva e suriettiva.

7. Sia U un piano in $\mathbf{R}^5$. Volendo scrivere U in forma cartesiana (ossia come insieme delle soluzioni di un sistema lineare), quante equazioni indipendenti servono?

8. Sia data la retta $r : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$. Scrivere equazioni cartesiane per r, ossia determinare un sistema lineare di cui r sia l'insieme delle soluzioni. Qual è il significato geometrico dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato?

9. Sia dato il sistema lineare $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ in $\mathbf{R}^3$. Determinare la soluzione generale di tale sistema. Qual è il significato geometrico dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato?

10. Sia data l'equazione linerare $x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$ in $\mathbf{R}^3$. Determinare la soluzione generale di tale sistema. Qual è il significato geometrico dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato?