1. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, determinare se F è un'applicazione lineare.
   (ii) Calcolare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$. Calcolare $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.
   (iii) Determinare l'immagine tramite F della retta per l'origine $\mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

2. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 1 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, determinare se F è un'applicazione lineare.
   (ii) Calcolare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$. Calcolare $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $3F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix})$. Come si conciliano questi risultati con quanto trovato al punto (i)?

3. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, verificare che F è un'applicazione lineare.
   (ii) È vero che $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, per $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

4. Sia $L\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ un polinomio omogeneo di primo grado

$$L(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

   Verificare che L è lineare.

5. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, verificare che F è un'applicazione lineare.
   (ii) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F (esibirne una base).
   (iii) Calcolare $F(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di F (esibirne una base).
   (iv) Dire se F è iniettiva o suriettiva.

6. Sia data l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F (esibirne una base).
   (ii) Calcolare $F(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di F.
   (iii) Cosa fa questa applicazione?

7. Sia data l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix})$ e $F(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix})$.

(ii) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F (esibirne una base).

(iii) Calcolare $F(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di F (esibirne una base).

(iv) Cosa fa questa applicazione?

8. Sia data l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

   (i) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F (esibirne una base).

   (ii) Calcolare $F(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di F (esibirne una base).

   (iii) Dire se F è iniettiva o suriettiva.

   (iv) Calcolare $F(U)$, l'immagine tramite F del sottospazio $U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\}$.

   Che dimensione ha?

   (v) Determinare la dimensione di $U \cap \ker F$.

9. Sia data l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

   (i) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F (esibirne una base).

   (ii) Calcolare $F(\mathbf{R}^4)$, l'immagine di F (esibirne una base).

   (iii) Dire se F è iniettiva o suriettiva.

   (iv) Calcolare l'immagine tramite F del sottospazio $U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}\}$.

   (v) Determinare la dimensione di $U \cap \ker F$.

10. Sia $F\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare dell'esercizio 9 e sia $G\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $G(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 0 \\ -x_2 \end{pmatrix}$.

    (i) Scrivere la formula generale di $G \circ F$.

    (ii) Calcolare $G \circ F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix})$.

    (iii) Calcolare il nucleo $\ker F$ e l'immagine $F(\mathbf{R}^4)$.

    (iv) Calcolare il nucleo $\ker(G \circ F)$ e l'immagine $G \circ F(\mathbf{R}^4)$.

    (v) Verificare che il nucleo di F è contenuto nel nucleo di $G \circ F$.

11. Sia data l'applicazione lineare

$$L_M\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2, \quad X \mapsto MX, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare le formule generali per L_M.
(ii) Determinare $\ker L_M$, il nucleo di L_M (esibirne una base).
(iii) Determinare $L_M(\mathbf{R}^4)$, l'immagine di L_M (esibirne una base).
(iv) Determinare l'insieme $A = \{X \in \mathbf{R}^4 \mid L_M(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

12. Sia data l'applicazione lineare

$$L_M \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \quad X \mapsto MX, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare le formule generali per L_M.
(ii) Determinare $\ker L_M$, il nucleo di L_M (esibirne una base).
(iii) Determinare $L_M(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di L_M (esibirne una base).
(iv) Dire se L_M è iniettiva o suriettiva.
(v) Determinare l'insieme $A = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid L_M(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.
(vi) Determinare l'insieme $A = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid L_M(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
(vii) Sia $U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 = 0\}$. Determinare l'immagine di U tramite L_M(esibirne una base).

13. Sia $L \colon V \to W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali.
   (i) Verificare che $\dim L(V) \leq \dim V$ e che $\dim L(V) < \dim V$ se e solo se L non è iniettiva.
   (ii) Verificare che se $\dim W < \dim V$, allora L non può essere iniettiva.
   (iii) Verificare che se $\dim V < \dim W$, allora L non può essere suriettiva.

14. Costruire esplicitamente una applicazione lineare $L \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ con $\dim \ker L = 1$, una applicazione lineare $L \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ con $\dim \ker L = 2$ e una applicazione lineare $L \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ con $\dim \ker L = 3$. Che dimensione ha $L(\mathbf{R}^3)$ in ognuno dei vari casi?

15. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ e sia $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un generico vettore di $\mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare la formula generale per la proiezione ortogonale $\pi_{\mathbf{v}}(X)$ di un vettore X su $\mathbf{v}$.
   (b) Verificare che si tratta di un'applicazione lineare.
   (c) Determinare il nucleo e l'immagine di $\pi_{\mathbf{v}}$, esibendone una base.
   (d) Dare un'interpretazione geometrica del risultato.

16. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ e sia $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un generico vettore di $\mathbf{R}^3$.
   (a) Sia $L \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $L(X) = X - \pi_{\mathbf{v}}(X)$.
   (b) Scrivere la formula generale per L e verificare che si tratta di un'applicazione lineare.
   (c) Determinare il nucleo e l'immagine di L, esibendone una base.
   (d) Dare un'interpretazione geometrica del risultato.