1. *Il prodotto "righe per colonne" fra matrici non è commutativo.* Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$. Calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e osservare che $A \cdot B \neq B \cdot A$.

2. *Per il prodotto "righe per colonne" fra matrici non vale il principio dell'annullamento.* Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $A \cdot B$ e osservare che $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *non* implica $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ oppure $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare due matrici B e C quadrate 2×2, diverse tra loro, per cui valga $A \cdot B = A \cdot C$.

4. Considerare lo spazio $M(2, 2, \mathbf{R})$ delle matrici reali 2×2 e siano $A, B, C \in M(2, 2, \mathbf{R})$ matrici arbitrarie.
   (i) Verificare che $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
   (ii) Verificare che $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
   (iii) Verificare che $A \cdot (\lambda B) = (\lambda A) \cdot B = \lambda(A \cdot B)$.

5. Sia data la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Sia $L_M \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione associata definita da $L_M(X) := M \cdot X$, ossia

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

   (i) Calcolare le formule generali per $L_M(X)$ e calcolare

$$L_M(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad L_M(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad L_M(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad L_M(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad L_M(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

   (ii) Verificare che $L_M(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \lambda L_M(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix})$, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.
   (iii) Verificare che $L_M(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = L_M(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) + L_M(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix})$.

6. Siano date le matrici $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ed $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare $M \cdot N$ e $N \cdot M$.
   (ii) Scrivere dominio, codominio e formule generali per le applicazioni $L_{M \cdot N}$ ed $L_{N \cdot M}$.

7. Siano date le matrici $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ed $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Siano $L_M : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ ed $L_N : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ le applicazioni associate.

   (i) Scrivere le formule generali per L_M ed L_N.

   (ii) Determinare dominio, codominio e formule generali per la composizione
   $$L_N \circ L_M(X) = L_N(L_M(X)).$$

   (iii) Determinare dominio, codominio e formule generali per la composizione
   $$L_M \circ L_N(X) = L_M(L_N(X)).$$

8. Esibire due matrici M ed N per cui sia definita $M \cdot N$ ma non $N \cdot M$.

9. Siano date le matrici $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ ed $N = \begin{pmatrix} p & q & a & \alpha \\ r & s & b & \beta \\ u & v & c & \gamma \end{pmatrix}$ e siano L_M ed L_N le applicazioni associate.

   (i) Determinare dominio, codominio e formule generali per L_M e L_N.

   (ii) Determinare se le composizioni $L_M \circ L_N$ ed $L_N \circ L_M$ sono ben definite.

   (iii) In caso affermativo, determinarne dominio, codominio e formule generali.

Sia $M(m, n, \mathbf{R})$ lo spazio delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali, e sia $M \in M(m, n, \mathbf{R})$. La *trasposta* di M, che si indica con ${}^tM$, è per definizione la matrice $n \times m$ che ha per colonne le righe di M (vedi Dispense di Algebra Lineare, alla fine della sez.6).

10. Siano date due matrici $M \in M(m, n, \mathbf{R})$ ed $N \in M(n, k, \mathbf{R})$.

   (i) Verificare che esiste il prodotto ${}^tN \cdot {}^tM$ e che è una matrice delle stesse dimensioni della matrice ${}^t(M \cdot N)$.

   (ii) Date $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ ed $N = \begin{pmatrix} p & q & a & \alpha \\ r & s & b & \beta \\ u & v & c & \gamma \end{pmatrix}$, verificare che ${}^t(M \cdot N) = {}^tN \cdot {}^tM$.