1. Siano dati i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ e sia $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Far vedere che formano una base di $\mathbf{R}^3$.
   (ii) Ortonormalizzarla col metodo di Gram-Schmidt.
   (iii) Calcolare le coordinate del vettore X nella base ortonormale così ottenuta.

2. Sia $V = \mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare canonico. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (i) Far vedere che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.
   (ii) A partire dalla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tramite il procedimento di Gram-Schmidt costruire una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.
   (iii) Determinare una base per il complemento ortogonale di $U = \text{span}\{\mathbf{v}_1\}$ e una base per il complemento ortogonale di $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

3. Ortonormalizzare i vettori $\left\{ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbf{R}^4$. Determinare il complemento ortogonale del sottospazio $W = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ in $\mathbf{R}^4$ esibendone una base.

4. Controllare se i vettori $\begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{pmatrix}$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

5. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ il cui primo vettore sia $P/||P||$. In quanti modi si puo' fare?

6. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$.
   (a) Completare $\mathbf{v}$ ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^2$.
   (b) Determinare $\mathbf{v}^\perp$, il complemento ortogonale di $\mathbf{v}$.

7. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.
   (a) Completare $\mathbf{v}$ ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$.
   (b) Determinare $\mathbf{v}^\perp$, il complemento ortogonale di $\mathbf{v}$.
   (c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ i vettori trovati al punto (a). Determinare il complemento ortogonale di $\text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$.

8. Dati i vettori $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$

(i) calcolare e confrontare $X \cdot Y$, $||X||^2$, $||Y||^2$, e $||X+Y||^2$.
(ii) Verificare che dati $X, Y \in \mathbf{R}^n$ con $X \cdot Y = 0$, allora $||X+Y||^2 = ||X||^2 + ||Y||^2$.

9. Sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$. Determinare l'insieme $\{X \in \mathbf{R}^2 \mid X \cdot P = 0\}$ e darne una interpretazione geometrica.

10. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Determinare l'insieme $\{X \in \mathbf{R}^3 \mid X \cdot P = 0\}$ e darne una interpretazione geometrica.

11. Sia data la retta $\quad r: \quad x_1 - 3x_2 = 0$ in $\mathbf{R}^2$ e sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
    (i) Determinare il complemento ortogonale $r^\perp$.
    (ii) Determinare la proiezione ortogonale $\pi_r(P)$.
    (iii) Determinare la distanza $d(P, r^\perp)$.

12. Sia dato il piano $\quad \alpha: \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$ in $\mathbf{R}^3$ e sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
    (i) Determinare il complemento ortogonale $\alpha^\perp$.
    (ii) Determinare la proiezione ortogonale $\pi_\alpha(P)$.
    (iii) Determinare la distanza $d(P, \alpha^\perp)$.

13. Sia data la retta $\quad r: \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ in $\mathbf{R}^3$ e sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
    (i) Determinare il complemento ortogonale $r^\perp$.
    (ii) Determinare la proiezione ortogonale $\pi_r(P)$.
    (iii) Determinare la distanza $d(P, r^\perp)$.

14. Sia U un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ e sia $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortogonale di U. Sia $U^\perp$ il suo complemento ortogonale e sia $\{v_1, \ldots, v_{n-k}\}$ una base ortogonale di $U^\perp$.
    (i) Far vedere che $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{n-k}\}$ è un insieme di vettori ortogonali.
    (ii) Far vedere che sono una base di $\mathbf{R}^n$.

15. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$.
    (a) Determinare e disegnare l'insieme A di tutti i vettori di $\mathbf{R}^2$ che sono ortogonali a $\mathbf{v}$.
    (b) Verificare che A è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$.
    (c) Esibire tre elementi distinti di A.
    (d) Esistono due elementi di A ortogonali fra loro ?
    (e) Determinare e disegnare tutti gli elementi di A che hanno norma uguale ad 1.

16. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.
    (a) Determinare e disegnare l'insieme A di tutti i vettori di $\mathbf{R}^3$ che sono ortogonali a $\mathbf{v}$.

(b) Verificare che A è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.
(c) Esibire tre elementi distinti di A.
(d) Esibire due elementi di A che siano ortogonali fra loro. Posso trovarne tre?
(e) Disegnare tutti gli elementi di A che hanno norma uguale ad 1.

17. Sia dato il sottospazio $W = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbf{R}^3$.
(a) Determinare equazioni cartesiane per W (per esempio sfruttando il prodotto vettoriale).
(b) Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W.

18. Sia dato il sottospazio $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0\}$ sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(a) Determinare la distanza di P da W.
(b) Determinare la distanza di P dal complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbf{R}^3$.
(c) Scomporre P come somma di vettori $P = P_W + P_{W^\perp}$, con $P_W \in W$ e $P_{W^\perp} \in W^\perp$.

19. Sia dato il sottospazio $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}\}$ e sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(a) Determinare la distanza di P da W.
(b) Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbf{R}^4$.
(c) Scomporre P come somma di vettori $P = P_W + P_{W^\perp}$, con $P_W \in W$ e $P_{W^\perp} \in W^\perp$.

20. Sia $U = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^4$, e sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(i) Determinare il complemento ortogonale $U^\perp$.
(ii) Determinare le proiezioni ortogonali $\pi_U(P)$ e $\pi_{U^\perp}(P)$ di P su U e $U^\perp$ rispettivamente.
(iii) Calcolare il prodotto scalare $\pi_U(P) \cdot \pi_{U^\perp}(P)$.
(iv) Calcolare la distanza del punto P da U e da $U^\perp$.