1. Dato il sistema lineare di tre equazioni in 3 incognite $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$,
   (a) determinare se le terne di vettori

   $$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   sono soluzioni del sistema;
   (b) determinare se il sistema è o meno compatibile;
   (c) se il sistema è compatibile, determinare la soluzione generale.

2. Determinare la soluzione generale del sistema lineare di due equazioni in 3 incognite

   $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

   Disegnare le soluzioni ottenute.

3. Considerare l'equazione lineare in due variabili $x_1 - 3x_2 = 0$.
   (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione;
   (b) Verificare che date due soluzioni qualunque dell'equazione la loro somma è soluzione dell'equazione;
   (c) Verificare che data una soluzione qualunque dell'equazione tutti i suoi multipli sono soluzioni dell'equazione.

4. Considerare l'equazione lineare in due variabili $x_1 - 3x_2 = 3$.
   (a) Verificare che $A = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono soluzioni dell'equazione;
   (b) Verificare che $A + B$ non è soluzione dell'equazione;
   (c) Verificare che $2A$ e $4B$ non sono soluzioni dell'equazione;
   (d) Disegnare la retta definita dall'equazione, ed i punti A, B, $A + B$, $2A$ e $4B$. Osservare che A, B appartengono alla retta, mentre i punti $A + B$, $2A$ e $4B$ no.

5. Considerare l'equazione lineare in tre variabili $x_3 = 0$.
   (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione e disegnare l'insieme trovato;
   (b) Verificare che date due soluzioni qualunque dell'equazione la loro somma è soluzione dell'equazione;
   (c) Verificare che data una soluzione qualunque dell'equazione tutti i suoi multipli sono soluzioni dell'equazione.

6. Considerare l'equazione lineare in tre variabili $x_3 = 1$.
   (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione e disegnare l'insieme trovato;
   (b) Verificare che date due soluzioni qualunque dell'equazione la loro somma non è soluzione dell'equazione;

(c) Verificare che data una soluzione qualunque dell'equazione tutti i suoi multipli sono soluzioni dell'equazione.

8. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$:

$$A = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = -x_2\} \qquad B = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_2 \geq 2\};$$

$$C = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - x_2 > 0\} \qquad D = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - 3x_2 < 1\}.$$

Richiamare la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio dato. Applicarla per determinare se A, B, C, D sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^2$.

9. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$:

$$U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \geq 0\}, \quad V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}\}, \quad W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 > 0 \end{cases}\}.$$

Richiamare la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio dato. Applicarla per determinare quali di essi sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$.

Consegnarmi lo svolgimento completo di questo esercizio:

10. Siano dati i due sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$

$$U = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_3 = 0\}.$$

(i) Verificare che si tratta di sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$;
(ii) deteminare le rispettive dimensioni ed esibirne una base;
(iii) dare un'interpretazione geometrica di U e V e farne un disegno approssimativo;
(iv) determinare se $U = V$, motivando bene la risposta.