1. Sia dato il sottospazio $S = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$ di $\mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare quali fra i seguenti insiemi di vettori sono basi di S:

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

   (b) Determinare un sottospazio complementare S^c ad S in $\mathbf{R}^3$. Che dimensione ha S?

2. Sia dato il sottospazio $V = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbf{R}^4$.
   (a) Determinare una base di V e la dimensione di V.
   (b) Determinare se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a V.
   (c) Determinare se V è contenuto nel sottospazio $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid 2x_1 - 3x_3 = 0\}$ di $\mathbf{R}^4$.
   (d) Determinare una base di $V \cap U$ e una base di $V + U$.

3. Siano dati i sottospazi $S = \{ \begin{pmatrix} a-b \\ 2a \\ a+b \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ e $T = \{ \begin{pmatrix} c+d \\ c-d \\ c+3d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid c, d \in \mathbf{R}\}$ di $\mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare la dimensione di S e la dimensione di T.
   (b) Determinare una base di $S + T$.
   (c) Determinare una base di $S \cap T$.

4. Sia dato il sottospazio $S = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, 2, \mathbf{R}) \mid \begin{cases} b + c = 0 \\ a - d = 0 \end{cases}\}$ dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali.
   (a) Determinare una base di S e la dimensione di S.
   (b) Verificare che la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ appartiene ad S. Determinare le sue coordinate nella base trovata in (a).
   (c) Determinare se le matrici $\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$ sono una base di S.
   (d) Determinare se le matrici $\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\}$ sono una base di S.

5. Sia dato il vettore $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$.
   (a) Determinare due diversi completamenti di $\mathbf{v}_1$ ad una base di $\mathbf{R}^2$.
   (b) Sia $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1\}$. Determinare due diversi complementi (o sottospazi complementari) V^c di V in $\mathbf{R}^2$. Farne un disegno.

6. Sia dato il vettore $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare due diversi completamenti di $\mathbf{v}_1$ ad una base di $\mathbf{R}^3$.
   (b) Sia $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1\}$. Determinare due diversi complementi (o sottospazi complementari) V^c di V in $\mathbf{R}^3$. Che dimensione hanno?

7. Siano dati i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare due diversi completamenti di $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ ad una base di $\mathbf{R}^3$.
   (b) Sia $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Determinare due diversi complementi (o sottospazi complementari) V^c di V in $\mathbf{R}^3$. Che dimensione hanno?

8. Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V. Verificare che la somma $U + W = \{v \in V \mid v = u + w,\ \ u \in U,\ w \in W\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

9. Verificare che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$ è una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^4$.
   (a) Determinare le coordinate in $\mathcal{B}$ dei vettori
   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) Determinare i vettori che in $\mathcal{B}$ hanno coordinate
   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

10. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4, e siano $\{\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ vettori linearmente indipendenti in V. Siano $U = span\{\mathbf{x}, \mathbf{u}\}$ e $W = span\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.
    (a) Verificare che $U \cap W = \{O\}$.
    (b) Determinare le coordinate dei vettori $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{x} + 2\mathbf{u}$ nella base $\{\mathbf{x}, \mathbf{u}\}$ di U.
    (c) Determinare un complemento ad U in V ed un complemento a W in V.
    (d) Determinare un complemento ad $span\{\mathbf{x}, \mathbf{w}\}$ in V.
    (e) Determinare un complemento ad $span\{\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ in V.

11. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori linearmente indipendenti in V. Sia $U = span\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.
    (a) Determinare le coordinate dei vettori $\mathbf{u} + \mathbf{v}, 3\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$ nella base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ di U.
    (b) Determinare le coordinate dei vettori $\mathbf{u} + \mathbf{v}, 3\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$ nella base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ di U.