

1. Scrivere \mathbf{R}^2 come *span* di opportuni vettori in tre modi diversi (aiutarsi con dei disegni).
2. Scrivere \mathbf{R}^3 come *span* di opportuni vettori in tre modi diversi (aiutarsi con dei disegni).
3. Sia dato il sottoinsieme $S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a+b \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$ di \mathbf{R}^3 .
 - (a) Determinare se i vettori $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartengono ad S .
 - (b) Esibire tre elementi di S .
 - (c) Usando la definizione, dimostrare che S è un sottospazio vettoriale di \mathbf{R}^3 .
 - (d) Determinare dei generatori di S , ossia scrivere S come *span* di opportuni vettori.
 - (e) Determinare dei generatori linearmente indipendenti di S .
4. Dato il sistema lineare omogeneo in 4 variabili $\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, scrivere le soluzioni come *span* di opportuni vettori linearmente indipendenti di \mathbf{R}^4 .
5. Esibire tre coppie di vettori linearmente indipendenti di \mathbf{R}^2 .
6. Esibire tre coppie e tre terne di vettori linearmente indipendenti di \mathbf{R}^3 .
7. Determinare se i vettori $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti. Se non lo sono, sceglierne un sottoinsieme massimale formato da elementi linearmente indipendenti.
8. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori linearmente indipendenti in V . Determinare se i vettori $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $3\mathbf{v}$, $\mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$ sono linearmente indipendenti (suggerimento: usare la definizione).
9. Dati i vettori di \mathbf{R}^4

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\},$$

usando l'eliminazione di Gauss per righe, determinare un insieme di generatori linearmente indipendenti di $\text{span}\{A, B, C, D, E, F\}$.