1. Fra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$, quante rette distinte ci sono ?

$$2x_1+3x_2=1, \quad \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ t\in\mathbf{R}\right\}, \quad \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix},\ t\in\mathbf{R}\right\}$$

$$4x_1-6x_2=1, \quad 2x_1+3x_2=0, \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ t\in\mathbf{R}.$$

2. Quali fra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ sono piani?

$$x_1-x_2+x_3=1, \quad \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ t,s\in\mathbf{R}\right\}, \quad \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix},\ t,s\in\mathbf{R}\right\},$$

$$x_1=1, \quad x_2+x_3=0, \quad \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ t,s,r\in\mathbf{R}\right\}.$$

3. Fra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$, quanti piani distinti ci sono?

$$x_1-x_2+x_3=1, \quad -x_1+x_2-x_3=1, \quad \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ t,s\in\mathbf{R}\}, \quad -x_1+x_2-x_3=-1$$

$$x_1+x_2+x_3=1, \quad \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ t,s\in\mathbf{R}\}.$$

4. Scrivere due rette paralelle non coincidenti in forma cartesiana, due rette paralelle non coincidenti in forma parametrica e due rette paralelle non coincidenti, di cui una in forma cartesiana e una in forma parametrica.

5. In $\mathbf{R}^2$, siano date la rette $r:\ x_1-2x_2=3$ ed $s:\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $t\in\mathbf{R}$, ed il punto $P=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$:
   (a) determinare se P appartiene o meno ad r o ad s;
   (b) determinare la retta parallela ad r e passante per P, sia in forma parametrica che in forma cartesiana;
   (c) determinare la retta ortogonale ad r e passante per P, sia in forma parametrica che in forma cartesiana;
   (d) determinare la retta parallela ad s e passante per P, sia in forma parametrica che in forma cartesiana;
   (e) determinare la retta ortogonale ad s e passante per P, sia in forma parametrica che in forma cartesiana;

5. In $\mathbf{R}^3$, siano dati la retta $s:\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$, $t\in\mathbf{R}$ ed il punto $P=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$:
   (a) determinare se P appartiene o meno ad s;
   (b) determinare il piano ortogonale ad s e passante per P.

(c) determinare la retta parallela ad s e passante per P, in forma parametrica;
(d) una una retta che non è parallela ad s, interseca necessariamente s? se possibile, costruire un controesempio.

6. In $\mathbf{R}^3$, siano dati i piani $\pi_1 : \;\; x_1 - 2x_2 = 3$ e $\pi_2 : \;\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; t, s \in \mathbf{R}$, ed il punto $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:
   (a) determinare se P appartiene o meno ad π_1 o a π_2;
   (b) determinare la posizione rispettiva di π_1 e π_2, ossia se sono o meno paralleli, coincidenti, ortogonali, incidenti.
   (c) determinare il piano parallelo a π_1, passante per P, ed il piano parallelo a π_2, passante per P.
   (d) determinare un piano parallelo a π_1, passante per P, ed un piano parallelo a π_2, passante per P. Quanti ce ne sono? spiegare bene con eventuali esempi.

7. In $\mathbf{R}^3$, siano dati il piano $\pi : \;\; 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$ ed il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:
   (a) verificare che P non appartiene a π;
   (b) calcolare la distanza di P da π (non usare formule già pronte, ma arrivarci con il ragionamento).

8. In $\mathbf{R}^3$, siano dati i piani $\pi_1 : \;\; x_1 - 2x_2 = 3$ e $\pi_2 : \;\; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$:
   (a) verificare che non sono paralleli;
   (b) calcolarne l'intersezione. Di che cosa si tratta?

9. In $\mathbf{R}^3$, siano dati il piano $\pi : \;\; x_1 - 2x_2 = 3$ e la retta $s : \;\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbf{R}$:
   (a) verificare che retta e piano non sono paralleli;
   (b) calcolarne l'intersezione. Di che cosa si tratta?
   (c) quante sono le rette passanti per l'origine e parallele al piano π? Scriverne qualcuna e controllare che ognuna sia effettivamente parallela a π.

10. In $\mathbf{R}^3$, siano dati i piani $\pi_1 : \;\; x_1 - 2x_2 = 3$ e $\pi_2 : \;\; x_1 - 2x_2 = 5$:
   (a) verificare che sono paralleli;
   (b) disegnarli;
   (c) calcolare la loro distanza (non usare formule già pronte, ma arrivarci con il ragionamento).