1. Sia data la base di $\mathbf{C}^3$ formata dai vettori $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$.
   (i) Verificare che si tratta di una base ortonormale.
   (ii) Determinare le coordinate dei vettori $\begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} i \\ 1-i \\ 2i \end{pmatrix}$ nella base data.

2. Sia $V = \mathbf{C}^2$ col prodotto hermitiano canonico e sia data l'applicazione lineare

$$L_B \colon \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2, \quad Z \mapsto BZ, \qquad B = \begin{pmatrix} 1/3 + 2i/3 & -2/3 \\ 2i/3 & 2/3 + i/3 \end{pmatrix}.$$

   (i) Far vedere che l'applicazione lineare $L_B$ è unitaria.
   (ii) Calcolare autovalori ed autospazi di $L_B$.
   (iii) Determinare una base di $\mathbf{C}^2$ formata da autovettori di $L_B$. Ne esiste una ortonormale?

3. Determinare quali delle seguenti matrici sono hermitiane o unitarie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

4. Determinare $a \in \mathbf{R}$ tale che la seguente matrice sia unitaria

$$\begin{pmatrix} a & i/2 & a(2i-1)/2 \\ ia & (1+i)/2 & a(1-i)/2 \\ a & -1/2 & a(2-i)/2 \end{pmatrix}.$$

5. Determinare per quali valori del parametro $z = x + iy \in \mathbf{C}$ le seguenti matrici sono hermitiane

$$\begin{pmatrix} 0 & 4+z \\ 4+z & i^2 z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2i+2 \\ 2i-2 & iz+1 \end{pmatrix}.$$

6. Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori delle seguenti matrici simmetriche $A$. Determinare una matrice ortogonale $C$ tale che $CAC^{-1}$ sia una matrice diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche, determinare una matrice ortogonale $2 \times 2$ con determinante uguale a uno, che la diagonalizzi

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

8. Determinare una base ortonormale di $\mathbf{C}^2$ formata da autovettori delle seguenti matrici hermitiane $B$. Determinare una matrice unitaria $C$ tale che $C^{-1}BC$ sia una matrice diagonale.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 6+2i \\ 6-2i & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 2\cos\varphi + 2i\mathrm{sen}\varphi \\ 2\cos\varphi - 2i\mathrm{sen}\varphi & -1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in \mathbf{R}.$$

9. Per ciascuna delle seguenti matrici hermitiane $M$, determinare una matrice unitaria $C$ tale che $C^{-1}MC$ sia diagonale:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}; \qquad M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -i/2 \\ i/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

10. Sia $M$ una matrice complessa unitaria che è *anche* hermitiana.
   (i) Dimostrare che $M^2 = \mathrm{id}$.
   (ii) Far vedere che gli autovalori di $M$ sono $\pm 1$.
   (iii) Dimostrare che esiste una matrice $C$ tale che $C^{-1}MC$ ha coefficienti reali.

11. Determinare se le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sono coniugate, cioè se esiste una matrice invertibile $C$ tale che $B = C^{-1}AC$.

12. Sia $M$ una matrice quadrata $n \times n$. Verificare i seguenti fatti:
   (a) Se $M$ è hermitiana ${}^tM = \overline{M}$, gli autovalori di $M$ sono reali.
   (b) Se $M$ è reale simmetrica ${}^tM = M$, gli autovalori di $M$ sono reali.
   (c) Se $M$ è antihermitiana ${}^tM = -\overline{M}$, gli autovalori di $M$ sono puramente immaginari.
   (d) Se $M$ è reale antisimmetrica ${}^tM = -M$, gli autovalori di $M$ sono puramente immaginari.
   (e) Se $M$ è unitaria ${}^tM \cdot \overline{M} = I_n$, gli autovalori di $M$ hanno modulo 1.
   (f) Se $M$ è reale ortogonale, gli autovalori reali (in generale, non tutti lo sono) di $M$ sono uguali a $\pm 1$.
   (g) In ognuno dei casi autovettori relativi ad autovalori distinti sono necessariamente ortogonali.

13. Sia $M$ una matrice reale quadrata $3 \times 3$ antisimmetrica. Dimostrare che ha un autovalore nullo.