1. Consideriamo lo spazio $\mathbf{R}^n$ con il prodotto scalare canonico $\langle -, - \rangle$. Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ un vettore con $\|\mathbf{v}\| = 1$. Definiamo $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ mediante $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$, per $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.
   (i) Dimostrare che f è lineare.
   (ii) Far vedere che $f^2 = f$.
   (iii) Determinare nucleo ed immagine di f.
   (iv) Calcolare autovalori ed autospazi di f.
   (v) Geometricamente cosa fa f?

2. Consideriamo lo spazio $\mathbf{R}^n$ con il prodotto scalare canonico $\langle -, - \rangle$. Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ un vettore con $\|\mathbf{v}\| = 1$. Definiamo $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ mediante $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$, per $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.
   (i) Dimostrare che f è lineare.
   (ii) Far vedere che $f^2 = f$.
   (iii) Determinare nucleo ed immagine di f.
   (iv) Calcolare autovalori ed autospazi di f.
   (v) Geometricamente cosa fa f?

3. Sia W un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ di dimensione k. Sia $\pi_W : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ la proiezione ortogonale sul sottospazio W.
   (a) Verificare che $\pi_W \circ \pi_W = \pi_W$.
   (b) Determinare il nucleo di π_W e la sua dimensione.
   (c) Determinare $\{X \in \mathbf{R}^n \mid \pi_W(X) = X\}$ e la sua dimensione.
   (d) Concludere che π_W è diagonalizzabile.

4. Fare gli esercizi assegnati e ricostruire "a libro chiuso" gli esercizi e gli esempi svolti contenuti in:

Dispense di Algebra Lineare, Sezione 10;
Dispense Isometrie di $\mathbf{R}^n$, pag. 1 - 5;
Dispense Applicazioni simmetriche etc.., Esercizio 1.1.

5. Sia A la matrice 3×3 data da

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

   (i) Far vedere che l'applicazione lineare $L_A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da $X \mapsto AX$ è un'isometria.
   (ii) Calcolare autovalori ed autospazi di L_A.

6. Determinare per quali delle seguenti matrici l'applicazione $L_A(X) = AX$ definisce un'isometria lineare:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Per quelle che definiscono un'isometria determinare autovalori e autospazi: in base ad essi provare a darne un'interpretazione geometrica.

7. Verificare (geometricamente e algebricamente) i seguenti fatti in $\mathbf{R}^2$:
   (a) Sia $T_{\mathbf{p}}$ la traslazione di passo $\mathbf{p}$. Allora $T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{q}}, \quad T_{\mathbf{p}}^{-1} = T_{-\mathbf{p}}, \quad T_{\mathbf{O}} = Id.$
   (b) Sia R_θ la rotazione di angolo θ. Allora $R_\theta \circ R_\phi = R_{\theta+\phi}, \quad R_\theta^{-1} = R_{-\theta}, \quad R_0 = Id.$
   (c) Sia S_θ la riflessione rispetto alla retta per l'origine che forma un angolo $\theta/2$ col semiasse delle ascisse positive. Allora $S_\theta \circ S_\phi = R_{\theta+\phi}, \quad S_\theta \circ S_\theta = Id.$

8. Per ognuna delle matrici simmetriche qui sotto determinare gli autovalori ed una base ortonormale di autovettori:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$