1. Sia $L\colon V \to V$ un'applicazione lineare. Richiamare la definizione di autovettore di autovalore λ, con $\lambda \in \mathbf{R}$.
   (a) Siano
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$
   Determinare se v è un autovettore dell'applicazione lineare $L_M\colon \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^6,\ X \mapsto MX$.

2. Sia $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$
   (a) Verificare che L è diagonalizzabile.
   (b) Determinare una matrice B tale che $M = BDB^{-1}$, dove M è la matrice data in $(*)$ e D è una opportuna matrice diagonale (chi è D??).
   (c) La matrice B è unica?

3. Sia $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$
   Determinare se L è diagonalizzabile.

4. Sia $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
   Supponiamo che sia $M = ADA^{-1}$, con $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calcolare M^4.
   (b) Chi sono gli autovalori e gli autospazi di M?

5. Sia data un'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$. Supponiamo che F abbia autovalori $\lambda = 4$ e $\lambda = 5$, con autospazi V_4 di dimensione due e V_5 di dimensione 3.
   (a) Dire se F è diagonalizzabile spiegando bene la risposta.
   (b) Dire se F è invertibile spiegando bene la risposta.
   (c) Sia M una qualunque matrice rappresentativa di F. Calcolare traccia e determinante di M.

6. Sia data un'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$. Supponiamo che F abbia autovalori $\lambda = 4$ con molteplicità algebrica uno, $\lambda = 5$ con molteplicità algebrica uno, e $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica due.

(a) A quali condizioni F è diagonalizzabile? Spiegare bene la risposta.
(b) Dire se F è invertibile spiegando bene la risposta.
(c) Sia M una qualunque matrice rappresentativa di F. Calcolare traccia e determinante di M.

7. Data $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare M^{100}.

8. Sia data l'applicazione lineare

$$L_M\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Determinare se esiste una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di L_M. In tale caso determinarne una.

9. Sia data l'applicazione lineare

$$L_M\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Determinare autovalori e autospazi di L_M. Dire se L_M è diagonalizzabile, spiegando bene la risposta.