1.a Determinare la matrice del cambiamento di base in $\mathbf{R}^2$ dalla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ alla base canonica.

(b) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ (ossia un vettore che ha coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$). Determinare le coordinate di $\mathbf{v}$ nella base canonica usando la definizione.

(c) Determinare le coordinate di $\mathbf{v}$ nella base canonica usando la matrice del cambiamento di base trovata in (a).

(d) Determinare l'inversa della matrice del cambiamento di base trovata in (a). Che cosa rappresenta?

2.a Determinare la matrice del cambiamento di base in $\mathbf{R}^2$ dalla base canonica alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

(b) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ossia un vettore che ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica). Determinare le coordinate di $\mathbf{v}$ nella base $\mathcal{B}$ usando la definizione.

(c) Determinare le coordinate di $\mathbf{v}$ nella base $\mathcal{B}$ usando la matrice del cambiamento di base trovata in (a).

(d) Determinare l'inversa della matrice del cambiamento di base trovata in (a). Che cosa rappresenta?

3.a Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ una base di $\mathbf{R}^2$. Sia F un'applicazione lineare tale che $F(\mathbf{v}_1) = 3\mathbf{v}_1$ e $F(\mathbf{v}_2) = 5\mathbf{v}_2$.

(b) Determinare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B}$ in dominio e codominio.

(c) Determinare se F è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

4. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$.

(i) Determinare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

(ii) Determinare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbf{R}^3$ e alla base $\mathcal{B}' = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbf{R}^2$.

(iii) Verificare che le matrici trovate hanno lo stesso rango.

5. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base di $\mathbf{R}^3$. Sia F un'applicazione lineare tale che $F(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1$, $F(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_2$, $F(\mathbf{v}_3) = O$.

(b) Determinare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B}$ in dominio e codominio.

(c) Determinare se F è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

(d) Sia $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Determinare la matrice rappresentativa di F nella base canonica in dominio e codominio.

6. Determinare il rango delle seguenti matrici e dire se sono o meno invertibili

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Determinare quali delle seguenti matrici sono invertibili. Quando lo sono, determinarne l'inversa.

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Sia $L\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare e disegnare $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $L(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
   (b) Cosa fa geometricamente L?
   (c) Determinare se è biiettiva e se lo è determinare la sua inversa.

9. Sia $L\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Cosa fa geometricamente L?
   (b) Determinare se è biiettiva e se lo è determinare la sua inversa.

10. Sia $L\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Determinare se è biiettiva e se lo è determinare la sua inversa.