

1. Sia $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

- (a) Verificare che L è diagonalizzabile.
 (b) Determinare una matrice B tale che $M = BDB^{-1}$, dove M è la matrice data in (*) e D è una opportuna matrice diagonale (chi è D ??).
 (c) La matrice B è unica?
2. Sia $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Determinare se L è diagonalizzabile.

3. Sia $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Supponiamo che sia $M = ADA^{-1}$, con $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calcolare M^4 .
 (b) Chi sono gli autovalori e gli autospazi di M ?
4. Sia data un'applicazione lineare $F: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^5$. Supponiamo che F abbia autovalori $\lambda = 4$ e $\lambda = 5$, con autospazi V_4 di dimensione due e V_5 di dimensione 3.
 (a) Dire se F è diagonalizzabile spiegando bene la risposta.
 (b) Dire se F è invertibile spiegando bene la risposta.
 (c) Sia M una qualunque matrice rappresentativa di F . Calcolare traccia e determinante di M .
5. Sia data un'applicazione lineare $F: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$. Supponiamo che F abbia autovalori $\lambda = 4$ con molteplicità algebrica uno, $\lambda = 5$ con molteplicità algebrica uno, e $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica due.
 (a) A quali condizioni F è diagonalizzabile? Spiegare bene la risposta.
 (b) Dire se F è invertibile spiegando bene la risposta.
 (c) Sia M una qualunque matrice rappresentativa di F . Calcolare traccia e determinante di M .