

1. Sia  $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione lineare data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

- (a) Verificare che  $L$  è diagonalizzabile.  
 (b) Determinare una matrice  $B$  tale che  $M = BDB^{-1}$ , dove  $M$  è la matrice data in (\*) e  $D$  è una opportuna matrice diagonale (chi è  $D$ ??).  
 (c) La matrice  $B$  è unica?
2. Sia  $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione lineare data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Determinare se  $L$  è diagonalizzabile.

3. Sia  $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'applicazione lineare data da  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

Supponiamo che sia  $M = ADA^{-1}$ , con  $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  e  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Calcolare  $M^4$ .  
 (b) Chi sono gli autovalori e gli autospazi di  $M$ ?
4. Sia data un'applicazione lineare  $F: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^5$ . Supponiamo che  $F$  abbia autovalori  $\lambda = 4$  e  $\lambda = 5$ , con autospazi  $V_4$  di dimensione due e  $V_5$  di dimensione 3.  
 (a) Dire se  $F$  è diagonalizzabile spiegando bene la risposta.  
 (b) Dire se  $F$  è invertibile spiegando bene la risposta.  
 (c) Sia  $M$  una qualunque matrice rappresentativa di  $F$ . Calcolare traccia e determinante di  $M$ .
5. Sia data un'applicazione lineare  $F: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ . Supponiamo che  $F$  abbia autovalori  $\lambda = 4$  con molteplicità algebrica uno,  $\lambda = 5$  con molteplicità algebrica uno, e  $\lambda = 0$  con molteplicità algebrica due.  
 (a) A quali condizioni  $F$  è diagonalizzabile? Spiegare bene la risposta.  
 (b) Dire se  $F$  è invertibile spiegando bene la risposta.  
 (c) Sia  $M$  una qualunque matrice rappresentativa di  $F$ . Calcolare traccia e determinante di  $M$ .