1. Scrivere $\mathbf{R}^2$ come *span* di opportuni vettori in tre modi diversi (aiutarsi con dei disegni).

2. Scrivere $\mathbf{R}^3$ come *span* di opportuni vettori in tre modi diversi (aiutarsi con dei disegni).

3. Sia dato il sottoinsieme $S = \{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a+b \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ di $\mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare se i vettori $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartengono ad S.
   (b) Esibire tre elementi di S.
   (c) Usando la definizione, dimostrare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.
   (d) Determinare dei generatori di S, ossia scrivere S come *span* di opportuni vettori.

4. Sia $M(2,2,\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Determinare generatori di $M(2,2,\mathbf{R})$, ossia scrivere $M(2,2,\mathbf{R})$ come *span* di opportune matrici.

5. Sia dato il sottoinsieme $S = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,2,\mathbf{R}) \mid b + 2c = 0\}$ dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali.
   (a) Determinare se le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ appartengono ad S.
   (b) Usando la definizione, dimostrare che S è un sottospazio vettoriale di $M(2,2,\mathbf{R})$.
   (c) Determinare dei generatori di S, ossia scrivere S come *span* di opportune matrici.

6. Dato il sistema lineare omogeneo in 4 variabili $\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, scrivere le soluzioni come *span* di opportuni vettori di $\mathbf{R}^4$.

7. Esibire tre coppie di vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^2$.

8. Esibire tre coppie e tre terne di vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^3$.

8. Determinare se i vettori $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti. Se non lo sono, sceglierne un sottoinsieme massimale formato da elementi linearmente indipendenti.

10. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, determinare se sono linearmente indipendenti.

11. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori linearmente indipendenti in V. Determinare se i vettori $\mathbf{u} + \mathbf{v}, 3\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$ sono linearmente indipendenti (suggerimento: usare la definizione).