Nei seguenti esercizi si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale, $RC(O,E)$ per $\mathbf{R}^n$, con coordinate cartesiane $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1. Sia $\mathbf{v} = (-1,-1,-1) \in \mathbf{R}^3$.
   (i) Trovare le formule per la rotazione $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ di angolo $\pi/2$ attorno al vettore $\mathbf{v}$;
   (ii) Sia l la retta di equazioni parametriche
   $$\mathbf{x} = (1,-1,0) + t(2,1,1), \quad t \in \mathbf{R}.$$
   Calcolare le equazioni parametriche della retta che si ottiene applicando $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ a l.

2. Sia $\mathbf{v} = (-1,-1,-1) \in \mathbf{R}^3$.
   (i) Trovare le formule per la rotazione $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ di un angolo $-\pi/4$ attorno al vettore $\mathbf{v}$;
   (ii) Sia Π il piano di equazione cartesiana
   $$x_1 + x_2 = 7.$$
   Calcolare le equazioni parametriche del piano che si ottiene applicando $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ a Π.

3. Sia π il piano di equazione cartesiana $x_1 + 2x_2 = 0$.
   (i) Calcolare le formule di riflessione rispetto a π;
   (ii) calcolare le immagini dei punti $(0,0,0)$ e $(-1,1,-1)$;
   (iii) calcolare l'immagine della retta di equazioni parametriche
   $$(5,0,0) + t\,(1,0,-1), \quad t \in \mathbf{R}.$$

4. Sia K il cubo in $\mathbf{R}^3$ di vertici:
   $$(1,1,1),\ (1,-1,1),\ (-1,1,1),\ (-1,-1,1),$$
   $$(1,1,-1),\ (1,-1,-1),\ (-1,1,-1),\ (-1,-1,-1).$$
   (i) Determinare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $\mathbf{e}_3$;
   (ii) Determinare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $\mathbf{e}_1$;
   (iii) Determinare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ attorno a $\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1$;
   (iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?

5. Sia T l'operatore autoaggiunto di $\mathbf{R}^4$ definito, rispetto alla base canonica, dalla matrice simmetrica
   $$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (i) Scrivere l'equazione della forma quadratica Q associata a T.
   (ii) Utilizzando il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, diagonalizzare A determinando la base ortonormale di autovettori di A in cui Q risulta essere una forma quadratica diagonale.
   (iii) Dedurre la forma canonica di Sylvester di Q, determinando esplicitamente la segnatura di Q.